Traitement des données expérimentales

Chapitre 1

Erreurs et bruit

1. Incertitudes de mesure
   - Incertitudes expérimentales
     - Erreurs systématiques
     - Erreurs aléatoires
   - Fluctuations statistiques

2. Propagation des erreurs
   - Erreurs connues exactement
   - Erreurs estimées statistiquement
   - Exemples

Incertitudes de mesure

1. Incertitudes expérimentales

Elles sont dues au fait que l'instrument de mesure n'est pas parfait.

On peut les classer en deux catégories :

(a) *erreurs systématiques* :

- affectent toutes les mesures de la même manière
- typiquement causées par une mauvaise calibration de l'instrument (ex : dilatation d'une règle graduée)
- également causées par des imprécisions dans le modèle utilisé pour interpréter les mesures brutes

(b) *erreurs aléatoires* :

- non reproductibles si on répète l'expérience
- diminuent si on répète l'expérience un plus grand nombre de fois
- distribuées selon une loi probabiliste (ex : imprécision dans la lecture d'une règle graduée)

2. Fluctuations statistiques

Ce sont des erreurs causées par la nature intrinsèquement statistique du phénomène étudié.

Cas typique : expériences de comptage

Des échantillons aléatoires d'événements distribués au hasard dans le temps contiennent des nombre d'événements qui fluctuent d'un échantillon à l'autre.

Ces fluctuations sont décrites par la *loi de Poisson* :

$$P(x) = \frac{\mu^x}{x!}\, e^{-\mu}$$

où μ est la moyenne et $P(x)$ la probabilité d'observer x événements.

Si μ est suffisamment grand, la loi de Poisson est proche de la loi normale (de Gauss) de moyenne μ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{\mu}$:

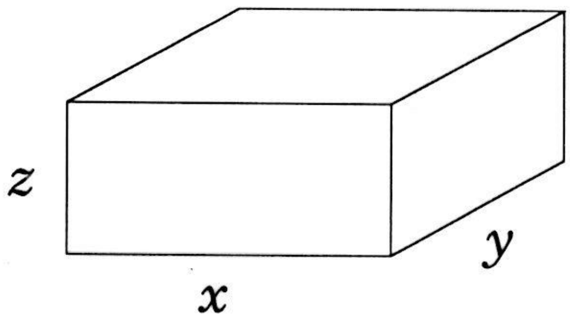
$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

La loi normale décrit de nombreux phénomènes aléatoires. En particulier, elle est souvent applicable au cas des incertitudes de mesure, qu'elles soient de nature expérimentale ou statistique.

Propagation des erreurs

1. <u>Erreurs connues exactement</u>

Exemple : détermination du volume d'un parallélipipède



$$V = x\,y\,z$$

Si le volume exact est

$$V_0 = x_0\,y_0\,z_0$$

on a, au premier ordre :

$$\Delta V \simeq \Delta x \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{y_0 z_0} + \Delta y \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{x_0 z_0} + \Delta z \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{x_0 y_0}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{V_0} \simeq \frac{\Delta x}{x_0} + \frac{\Delta y}{y_0} + \frac{\Delta z}{z_0}$$

2. Erreurs estimées statistiquement

En général, on ne connaît qu'une estimation de l'erreur (par exemple, l'écart-type σ de la distribution statistique des résultats de mesure).

Soit

$$x = x(u, v, \ldots)$$

une grandeur qui dépend de plusieurs autres $u, v, \ldots$

Supposons que la valeur moyenne $\bar{x}$ est donnée par :

$$\bar{x} \simeq x(\bar{u}, \bar{v}, \ldots)$$

(c'est le cas si x peut être approximé par une fonction linéaire de u, v,... dans le domaine d'incertitude de ces paramètres autour de leur valeur moyenne; c'est aussi la condition pour pouvoir limiter la série de Taylor de la page suivante au premier terme)

$\Rightarrow$ comment estimer σ_x, connaissant σ_u, σ_v,... ?

Soit

$$x_i = x(u_i, v_i, \ldots)$$

une détermination de x

$$\Rightarrow \sigma_x^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_i (x_i - \bar{x})^2$$

Au 1[er] ordre :

$$x_i - \bar{x} \simeq (u_i - \bar{u}) \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) + (v_i - \bar{v}) \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \cdots$$

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 \simeq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_i \Big[&(u_i - \bar{u})^2 \left(\tfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + (v_i - \bar{v})^2 \left(\tfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \cdots \\ &+ 2\,(u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v}) \left(\tfrac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\tfrac{\partial x}{\partial v}\right) + \cdots \Big]\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_x^2 \simeq \sigma_u^2 \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \sigma_v^2 \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + 2\,\sigma_{uv}^2 \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \cdots}$$

avec

$$\sigma_u^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_i (u_i - \bar{u})^2 \qquad \text{(variance)}$$

$$\sigma_{uv}^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_i (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v}) \qquad \text{(covariance)}$$

Cas particuliers :

(1) Si les erreurs sur u, v,... sont *non corrélées* :

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_x^2 \simeq \sigma_u^2 \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \sigma_v^2 \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \cdots}$$

(2) Si les erreurs sur u, v,... sont *parfaitement corrélées* :

$$v_i - \bar{v} = \alpha \left(u_i - \bar{u}\right)$$

$$\Rightarrow \sigma_{uv}^2 = \alpha \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_i (u_i - \bar{u})^2 = \alpha\, \sigma_u^2 = \sigma_u \sigma_v$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_x \simeq \sigma_u \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) + \sigma_v \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \cdots}$$

corrélation parfaite $\Rightarrow$ somme directe

indépendance parfaite $\Rightarrow$ somme quadratique

Exemples :

(1) $x = a\,u + b\,v$

$$\Rightarrow \sigma_x^2 = a^2\sigma_u^2 + b^2\sigma_v^2 + 2\,a\,b\,\sigma_{uv}^2$$

(2) $x = a\,u\,v$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_x^2}{x^2} = \frac{\sigma_u^2}{u^2} + \frac{\sigma_v^2}{v^2} + 2\,\frac{\sigma_{uv}^2}{uv}$$

(3) $x = a\,\dfrac{u}{v}$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_x^2}{x^2} = \frac{\sigma_u^2}{u^2} + \frac{\sigma_v^2}{v^2} - 2\,\frac{\sigma_{uv}^2}{uv}$$

(4) $x = a\,u^b$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_x}{x} = b\,\frac{\sigma_u}{u}$$

(5) $x = a\,e^{bu}$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_x}{x} = b\,\sigma_u$$

(6) $x = a\,\ln(bu)$

$$\Rightarrow \sigma_x = a\,\frac{\sigma_u}{u}$$