Chapitre 10

Déconvolution. Méthodes directes élémentaires.

1. Méthode de Van Cittert

2. Méthodes non linéaires
   - Importance des connaissances *a priori*
   - Méthode de Gold

Méthode de Van Cittert

$$d(x) = s(x) * f(x) + n(x)$$

$$d(x) \simeq s(x) * f(x)$$

$$d(x) - s(x) * f(x) \simeq 0$$

$$f(x) + d(x) - s(x) * f(x) \simeq f(x)$$

$\Rightarrow$ récurrence:

$$f^{(k+1)}(x) = f^{(k)}(x) + d(x) - s(x) * f^{(k)}(x)$$

$$f^{(0)}(x) = d(x)$$

Nouvelle estimation de l'objet

=

ancienne estimation de l'objet

+

erreur sur l'image estimée

Dans l'espace de Fourier :

$$F^{(k+1)}(u) = F^{(k)}(u)[1 - S(u)] + D(u)$$

$$F^{(0)}(u) = D(u)$$

$$F^{(1)}(u) = D(u)[1 - S(u)] + D(u)$$

$$F^{(k)}(u) = D(u) \sum_{j=0}^{k} [1 - S(u)]^j$$

Or,

$$(1 - x) \sum_{j=0}^{n} x^j = 1 - x^{n+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{k} [1 - S(u)]^j = \frac{1 - [1 - S(u)]^{k+1}}{S(u)}$$

On peut donc écrire :

$$F^{(k)}(u) = \frac{D(u)}{S(u)}\,\Phi_k(u)$$

avec

$$\Phi_k(u) = 1 - [1 - S(u)]^{k+1}$$

$$\text{si } |\,1 - S(u)\,| < 1 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \Phi_k(u) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} F^{(k)}(u) = \frac{D(u)}{S(u)}$$

(filtrage inverse)

Pour k fini, le filtre $\Phi_k(u)$ supprime les fréquences pour lesquelles $S(u)$ est petit (mais de moins en moins au fur et à mesure que $k \to \infty$)

$\Rightarrow$ cette méthode n'est pas recommandable car :

(1) pour $k \to \infty$ elle tend vers le filtrage inverse

(2) pour k fini, le filtre n'est jamais optimal

Méthodes non linéaires

Importance des connaissances *a priori*

1.- *Données à support compact*

$$f(x) = 0 \quad \text{si} \quad |x| > L$$

$$\Rightarrow F(u) = \int_{-L}^{+L} f(x)\, e^{i2\pi xu}\, dx$$

$$\Rightarrow \frac{d^n F(u)}{du^n} = (i2\pi)^n \int_{-L}^{+L} x^n\, f(x)\, e^{i2\pi xu}\, dx$$

L fini $\Rightarrow \frac{d^n F(u)}{du^n}$ est fini pour tout $f(x)$ réaliste

$\Rightarrow F(u)$ peut être développé en série de Taylor au voisinage de u_0 quelconque

($F(u)$ = fonction analytique)

Une fonction analytique peut être complètement déterminée par la connaissance, soit:

(1) de toutes ses dérivées en un point

(2) de ses valeurs dans un intervalle fini

Supposons le bruit nul :

$\Rightarrow$ par filtrage inverse, $F(u)$ est connu dans un intervalle $[-u_0, u_0]$

$\Rightarrow$ $F(u)$ est connu $\forall u$!

En l'absence de bruit,
des données à support compact
peuvent être déconvoluées parfaitement,

même si les fréquences élevées sont
complètement annulées
par la convolution

!

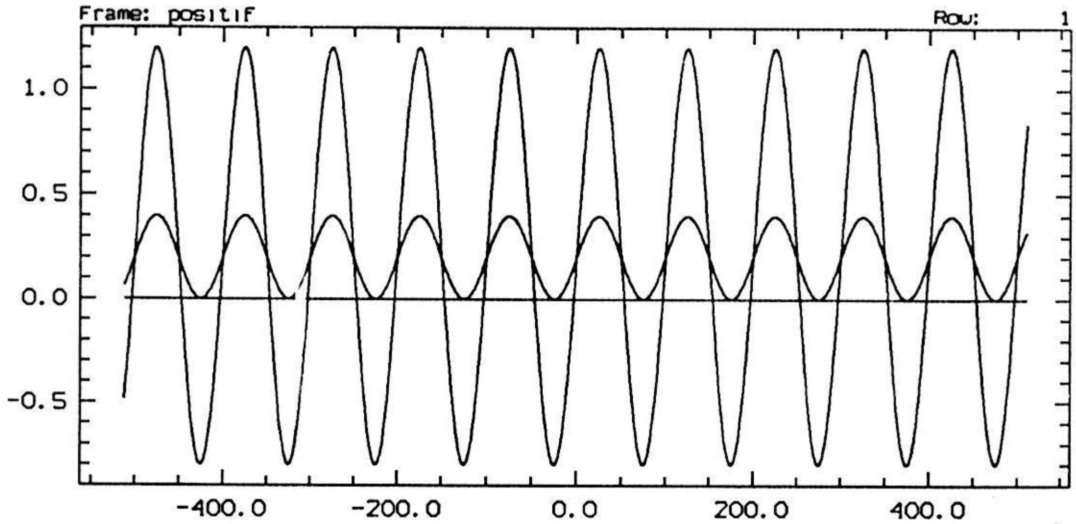
2.- *Données positives*

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x$$

Différentes solutions possibles $\hat{f}(x)$ ont les mêmes composantes de Fourier de fréquences basses. Elles diffèrent par les fréquences élevées.

Les multiples solutions possibles diffèrent donc par des termes oscillatoires de fréquences plus élevées que celles transmises par le profil instrumental.

En forçant $\hat{f}(x) \geq 0$, on empêche les oscillations négatives $\Rightarrow$ les oscillations positives sont automatiquement réduites sous peine de modifier la valeur moyenne.



Méthode de Gold

$$d(x) = s(x) * f(x) + n(x)$$

$$d(x) \simeq s(x) * f(x)$$

$$\frac{d(x)}{s(x) * f(x)} \simeq 1$$

$$f(x)\, \frac{d(x)}{s(x) * f(x)} \simeq f(x)$$

$\Rightarrow$ récurrence:

$$\boxed{f^{(k+1)}(x) = f^{(k)}(x)\, \frac{d(x)}{s(x) * f^{(k)}(x)}}$$

$$f^{(0)}(x) = d(x)$$

$$\text{si } d(x) \geq 0 \text{ et } s(x) \geq 0$$

$$\Rightarrow \underline{f^{(k)}(x) \geq 0 \quad \forall k}$$

Arrêt de l'itération

Dans les méthodes récursives, il n'est pas possible (ni souhaitable) de poursuivre indéfiniment les itérations

(ex: méthode de Van Cittert $\longrightarrow$ filtrage inverse)

Critère d'arrêt :

lorsque la reconstruction $\hat{f}(x) * s(x)$ est suffisamment proche des données $d(x)$

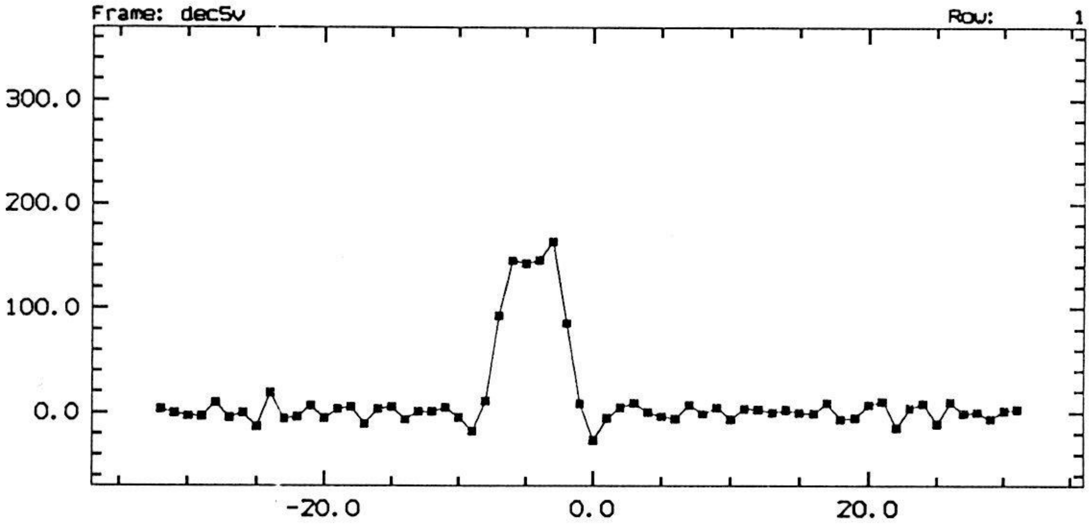
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{(\hat{f} * s)_i - d_i}{\sigma_i} \right]^2$$

où σ_i^2 = variance de la mesure d_i

On s'arrête lorsque les données reconstruites sont statistiquement compatible avec les données de départ

$$\Rightarrow \chi^2 \simeq N$$

Déconvolution de l'exemple 5. Méthode de Van Cittert



Méthode de Gold