

Chapitre 12

Déconvolution.

Méthodes bayésiennes.

1. Rappel : formule de Bayes
2. Méthode de Richardson-Lucy
3. Méthodes bayésiennes de déconvolution
 - Estimation de la vraisemblance
 - Estimation de la probabilité *a priori*
 - Etude de quelques cas

Formule de Bayes

$$P(q_i | r \cdot p) = \frac{P(q_i | p) P(r | q_i \cdot p)}{\sum_{j=1}^n P(q_j | p) P(r | q_j \cdot p)}$$

$P(q_i | p)$ = **probabilité a priori**
(avant les données supplémentaires r)

$P(q_i | r \cdot p)$ = **probabilité a posteriori**
(après considération de r)

$P(r | q_i \cdot p)$ = **vraisemblance** = « probabilité directe »
(= probabilité du résultat r sous l'hypothèse q_i et les données de base p)

\Rightarrow Probabilité a posteriori \propto
Probabilité a priori \times Vraisemblance

Méthode de Richardson-Lucy

Cas de la déconvolution d'image. Généralisation immédiate pour toutes données intrinsèquement positives.

Hypothèse à tester :

$q_i \equiv$ « le photon est émis dans le pixel i » ($i = 1, \dots, N$)

Donnée supplémentaire :

$r_k \equiv$ « le photon est enregistré dans le pixel k »

$$P(q_i | r_k \cdot p) = \frac{P(q_i | p) P(r_k | q_i \cdot p)}{\sum_{j=1}^N P(q_j | p) P(r_k | q_j \cdot p)}$$

Mais

$$\begin{aligned} P(q_i | p) &= \sum_{k=1}^N P(q_i \cdot r_k | p) \\ &= \sum_{k=1}^N P(r_k | p) P(q_i | r_k \cdot p) \end{aligned}$$

D'où :

$$P(q_i | p) = \sum_{k=1}^N P(r_k | p) \frac{P(q_i | p) P(r_k | q_i \cdot p)}{\sum_{j=1}^N P(q_j | p) P(r_k | q_j \cdot p)}$$

Supposons l'objet (= la grandeur à mesurer), l'image et le profil instrumental normalisés :

$$P(q_i | p) = f_i$$

$$P(r_k | p) = d_k$$

$$P(r_k | q_i \cdot p) = s_{ik}$$

$$\Rightarrow f_i = \sum_{k=1}^N \frac{d_k f_i s_{ik}}{\sum_{j=1}^N f_j s_{jk}}$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x) \left[s(x) * \frac{d(x)}{s(x) * f(x)} \right]$$

\Rightarrow récurrence :

$$f^{(k+1)}(x) = f^{(k)}(x) \left[s(x) * \frac{d(x)}{s(x) * f^{(k)}(x)} \right]$$

$$f^{(0)}(x) = d(x)$$

si $d(x) \geq 0$ et $s(x) \geq 0$

$$\Rightarrow f^{(k)}(x) \geq 0 \quad \forall k$$

Méthodes bayésiennes de déconvolution

Hypothèse à tester :

$q_i \equiv$ « l'objet observé est constitué par la distribution de lumière (f_1^i, \dots, f_N^i) »

Donnée supplémentaire :

$r \equiv$ « l'image obtenue est constituée par la distribution de lumière (d_1, \dots, d_N) »

$$P(q_i | r.p) = \frac{P(q_i | p) P(r | q_i.p)}{\sum_{j=1}^N P(q_j | p) P(r | q_j.p)}$$

Mais l'espace des objets est trop vaste pour permettre une estimation de $P(q_i | r.p)$ pour chacun d'eux

\Rightarrow on sélectionne l'objet qui a la plus grande probabilité *a posteriori*, étant donnée l'image

On cherche donc le maximum de

$$P(q_i | r.p) \propto P(q_i | p) P(r | q_i.p)$$

Estimation de la vraisemblance

$$P(r \mid q_i \cdot p)$$

$$r = (d_1, \dots, d_N)$$

Supposons que les intensités mesurées dans les différents pixels obéissent à des statistiques indépendantes

$$\Rightarrow P(r \mid q_i \cdot p) = \prod_{j=1}^N P(d_j \mid q_i \cdot p)$$

Or

$$P(d_j \mid q_i \cdot p) = P(d_j \mid b_j^i \cdot p)$$

où $b_j^i = b_j$ est l'intensité de l'image idéale (sans bruit) dans le pixel j

$$b_j = \sum_{k=1}^N s_{jk} f_k$$

(1) *Statistique gaussienne*

$$P(d_j | b_j \cdot p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} e^{-\frac{(d_j - b_j)^2}{2\sigma_j^2}}$$

$$\Rightarrow P(r | q_i \cdot p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \prod_{j=1}^N \frac{1}{\sigma_j} e^{-\frac{(d_j - b_j)^2}{2\sigma_j^2}}$$

$$\Rightarrow \ln P(r | q_i \cdot p) = C - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left(\frac{d_j - b_j}{\sigma_j} \right)^2$$

(2) *Statistique poissonnienne*

$$P(d_j | b_j \cdot p) = \frac{b_j^{d_j}}{d_j!} e^{-b_j}$$

$$P(r | q_i \cdot p) = \prod_{j=1}^N \frac{b_j^{d_j}}{d_j!} e^{-b_j}$$

$$\ln P(r | q_i \cdot p) = C + \sum_{j=1}^N (d_j \ln b_j - b_j)$$

Estimation de la probabilité *a priori*

(1) *Uniformité*

tous les objets ont la même probabilité *a priori*

$$P(q_i | p) = C$$

(2) *Argument combinatoire*

Un objet a une probabilité proportionnelle au nombre de manières de le réaliser en redistribuant les photons entre les pixels

$$P(q_i | p) \propto \frac{(\sum_{j=1}^N f_j)!}{\prod_{j=1}^N f_j!}$$

$$\ln P(q_i | p) = \ln \left[\left(\sum_{j=1}^N f_j \right)! \right] - \sum_{j=1}^N \ln(f_j!)$$

Stirling :

$$\Rightarrow \ln P(q_i | p) \simeq - \sum_{j=1}^N f_j \ln \frac{f_j}{\sum_{k=1}^N f_k}$$

= entropie de Shannon

Etude de quelques cas

Cas 1 : statistique gaussienne avec probabilités *a priori* uniformes

⇒ maximiser

$$F_1 = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left(\frac{d_j - b_j}{\sigma_j} \right)^2$$

⇒ minimiser le χ^2

Cas 2 : statistique gaussienne avec probabilités *a priori* proportionnelles au nombre de manières de distribuer les photons

⇒ maximiser

$$F_2 = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left(\frac{d_j - b_j}{\sigma_j} \right)^2 - \sum_{j=1}^N f_j \ln \frac{f_j}{\sum_{k=1}^N f_k}$$

⇒ \simeq méthode du maximum d'entropie

Cas 3 : statistique poissonnienne avec probabilités *a priori* uniformes

⇒ maximiser

$$F_3 = \sum_{j=1}^N (d_j \ln b_j - b_j)$$

avec

$$b_j = \sum_{i=1}^N s_{ij} f_i$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial f_k} = 0 \quad (k = 1, \dots, N)$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^N \frac{d_j}{\sum_{i=1}^N s_{ij} f_i} s_{kj} - \sum_{j=1}^N s_{kj} = 0$$

$$\Rightarrow \left[s * \frac{d}{s * f} \right]_k = 1 \quad (k = 1, \dots, N)$$

Si résolution par méthode récursive :

$$f_k^{(m+1)} = f_k^{(m)} \left[s * \frac{d}{s * f} \right]_k$$

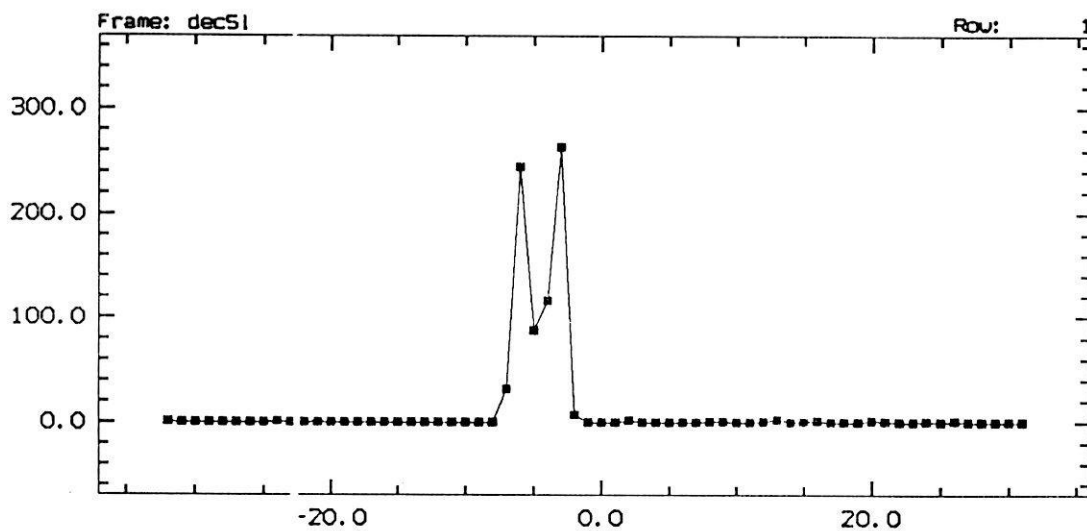
⇒ méthode de Richardson-Lucy

Cas 4 : statistique poissonnienne avec probabilités *a priori* proportionnelles au nombre de manières de distribuer les photons

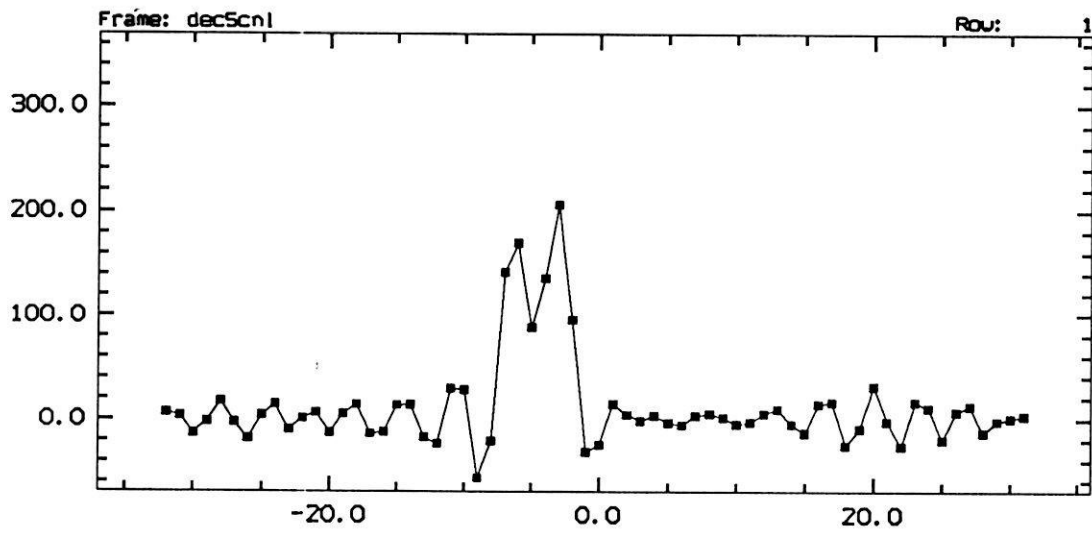
⇒ maximiser

$$F_4 = \sum_{j=1}^N (d_j \ln b_j - b_j) - \sum_{j=1}^N f_j \ln \frac{f_j}{\sum_{k=1}^N f_k}$$

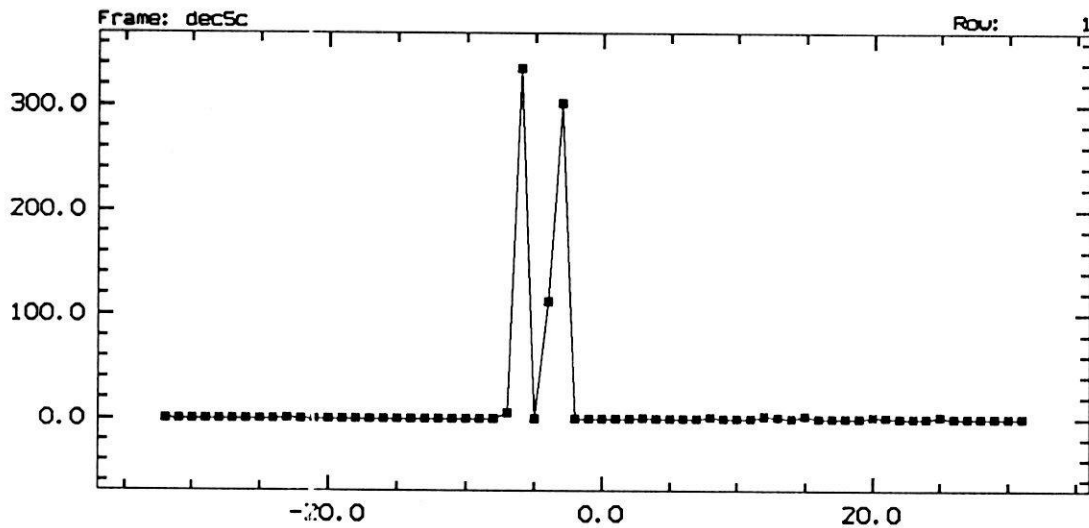
Déconvolution de l'exemple 5. Méthode de Richardson-Lucy



Déconvolution de l'exemple 5. Minimisation du χ^2 , sans contrainte.

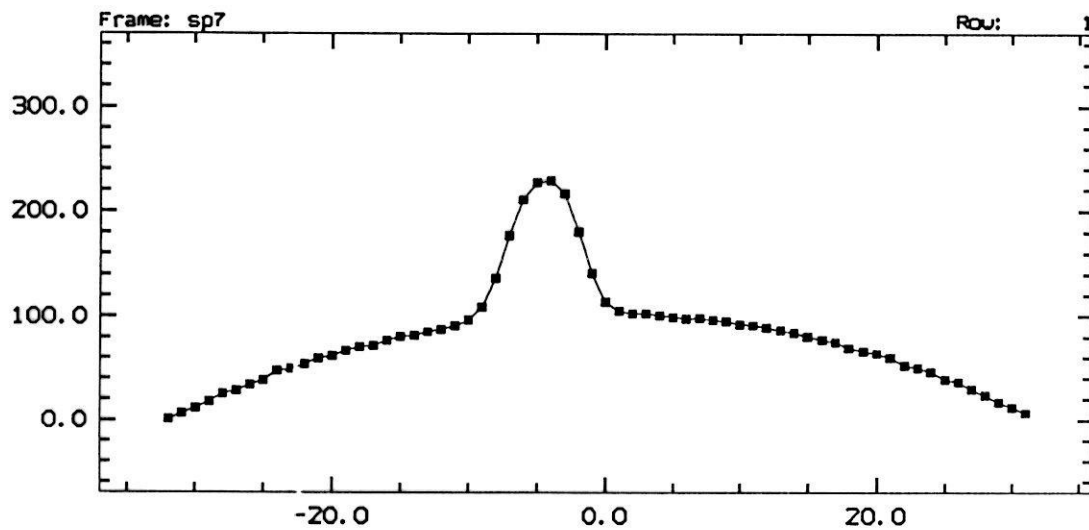


Minimisation du χ^2 , contrainte de positivité.

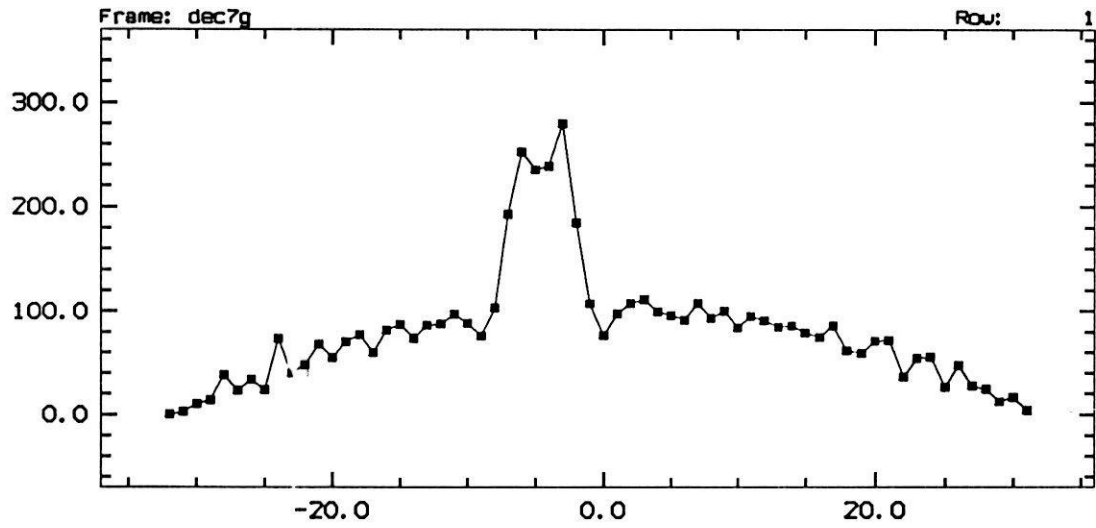


On peut illustrer l'effet de la contrainte de positivité en comparant un cas où elle est pleinement efficace (sources ponctuelles) à un cas analogue où son efficacité est réduite (sources ponctuelles superposées à un fond continu).

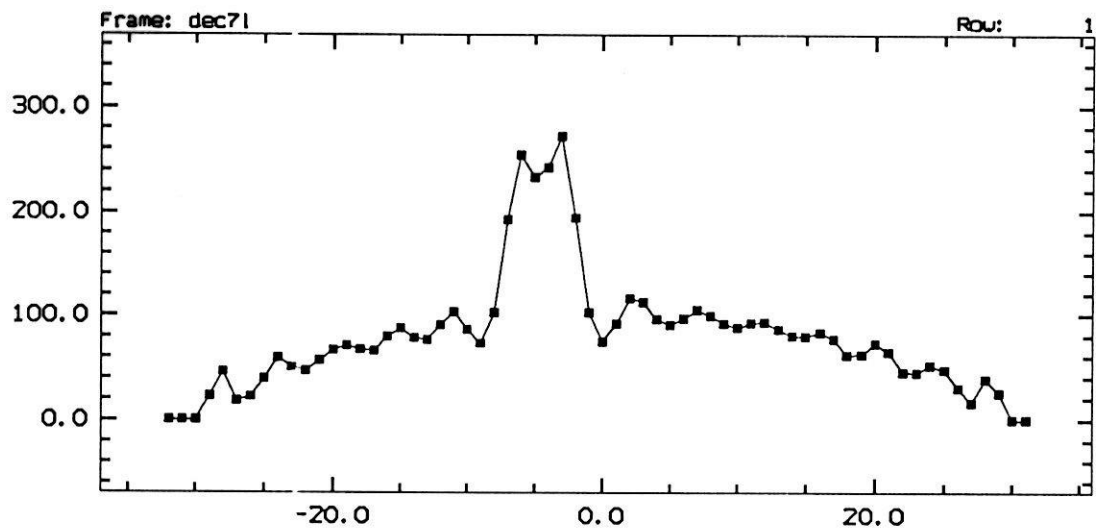
Exemple 6 = exemple 5 + fond continu



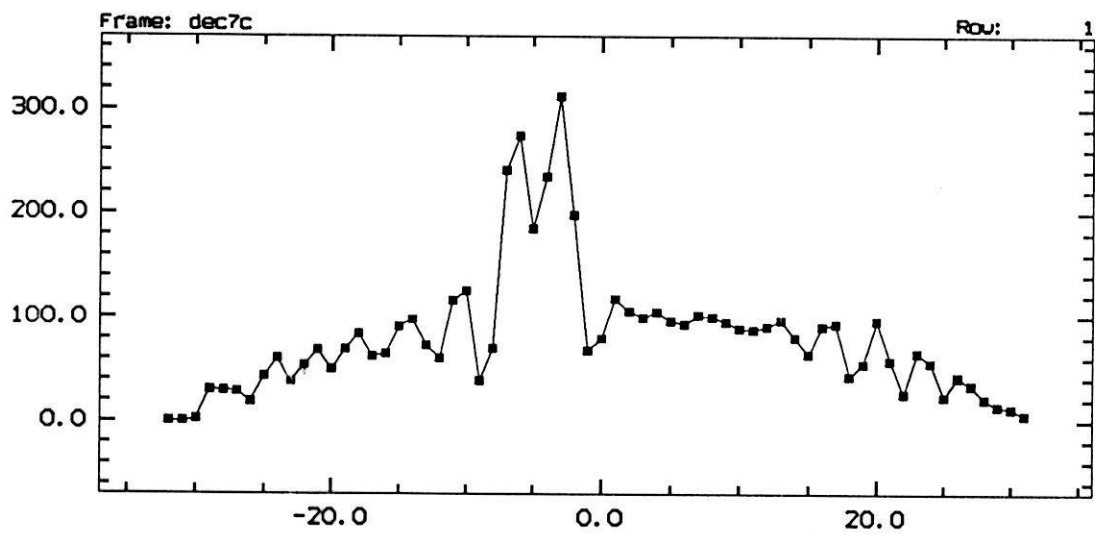
Méthode de Gold



Méthode de Richardson-Lucy



Minimisation du χ^2 avec contrainte de positivité



Méthode du maximum d'entropie

