Chapitre 3

Transformées de Fourier

1. Définition

2. Propriétés

3. Exemples

4. Transformée de Fourier discrète

5. Transformée de Fourier rapide

Transformées de Fourier

Soit $f(x)$ une fonction, $F(u)$ sa transformée de Fourier :

$$F(u) = \mathcal{F}_u\, f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{i2\pi ux}\, dx$$

Transformée de Fourier inverse :

$$f(x) = \mathcal{F}_x\, F = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)\, e^{-i2\pi xu}\, du$$

« Fonction δ » :

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

$$\delta(0) = \infty$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, \delta(x-y)\, dy = f(x)$$

Propriétés

$f(x)$: réelle et paire $\Leftrightarrow$ $F(u)$: réelle et paire

$f(x)$: réelle et impaire $\Leftrightarrow$ $F(u)$: imaginaire et impaire

$$\mathcal{F}\, f(a\,x) = \frac{1}{|a|}\, F(\frac{u}{a})$$

$$\mathcal{F}\, f(x - x_0) = e^{i2\pi u x_0}\, F(u)$$

<u>Théorème de Parseval</u> :

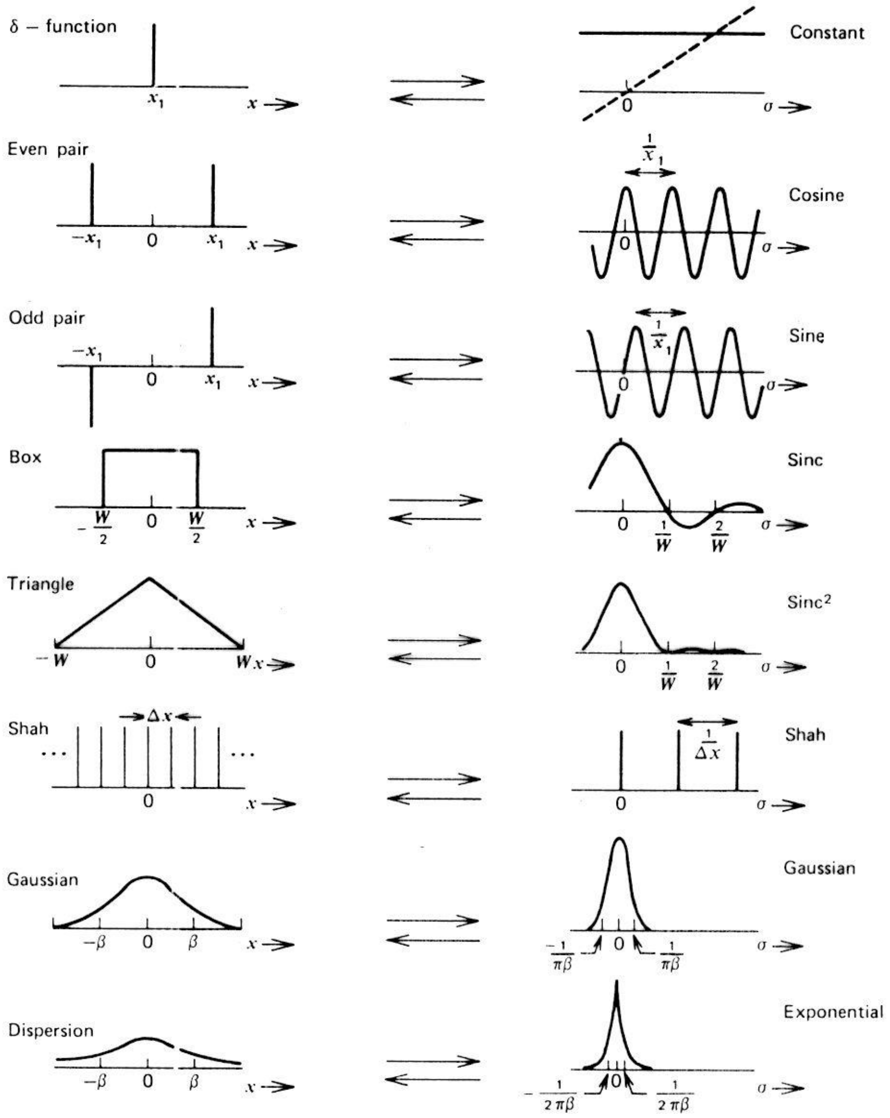
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(u)|^2\, du$$

$\Leftrightarrow$ « conservation de l'énergie »

<u>Théorème de la convolution</u> :

$$\mathcal{F}(f * g) = F \cdot G$$

Exemples



δ – function
Constant
Even pair
Cosine
Odd pair
Sine
Box
Sinc
Triangle
Sinc²
Shah
Shah
Gaussian
Gaussian
Dispersion
Exponential

Transformée de Fourier discrète

Problème : estimer la T.F. d'une fonction à partir d'un nombre fini de points d'échantillonnage

$f(x)$ est donnée en N points espacés de Δx :

$$f_j = f(x_j) \quad : \quad x_j = j \cdot \Delta x \,, \quad j = 1, \ldots, N$$

$F(u)$ est calculée en N points espacés de $\Delta u = \frac{1}{N\Delta x}$:

$$u_k = \frac{k}{N\Delta x} \quad : \quad k = -\frac{N}{2}, \ldots, \frac{N}{2}$$

$$\Rightarrow F(u_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{i2\pi u_k x}\, dx \simeq \Delta x \sum_{j=1}^{N} f_j\, e^{i2\pi jk/N}$$

$$F(u_k) \simeq \Delta x\, F_k$$

Transformée de Fourier discrète :

$$F_k = \sum_{j=1}^{N} f_j\, e^{i2\pi jk/N}$$

Transformée de Fourier discrète inverse:

$$f_j = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} F_k\, e^{-i2\pi jk/N}$$

Transformée de Fourier rapide

Nombre d'opérations à effectuer pour calculer la T.F. directe : $O(N^2)$

Mais : il existe un algorithme (Fast Fourier Transform, FFT) permettant de calculer la T.F. en $O(N \log_2 N)$ opérations

Principe : une T.F. sur N points est la somme de deux T.F. sur $N/2$ points $\Rightarrow$ utilisation récursive

Gain en temps de calcul :
si $N = 10^6$:
$N^2 = 10^{12}$,
$N \log_2 N \simeq 20 \cdot 10^6$

Si chaque opération prend $1\,\mu$s, la FFT se calcule en $\sim 20\,$s, la T.F. directe en ~ 12 jours !

L'algorithme de base fonctionne lorsque N est une puissance de 2, mais des algorithmes plus généraux existent