Chapitre 4

Echantillonnage et interpolation

1. Théorème de l'échantillonnage
   - Démonstration graphique
   - Fréquence de Nyquist
   - Aliasing. Illustration graphique

2. Interpolation
   - Reconstruction d'une fonction continue
   - Oscillations de Gibbs
   - Influence du bruit

Théorème de l'échantillonnage

échantillonner

$\Leftrightarrow$

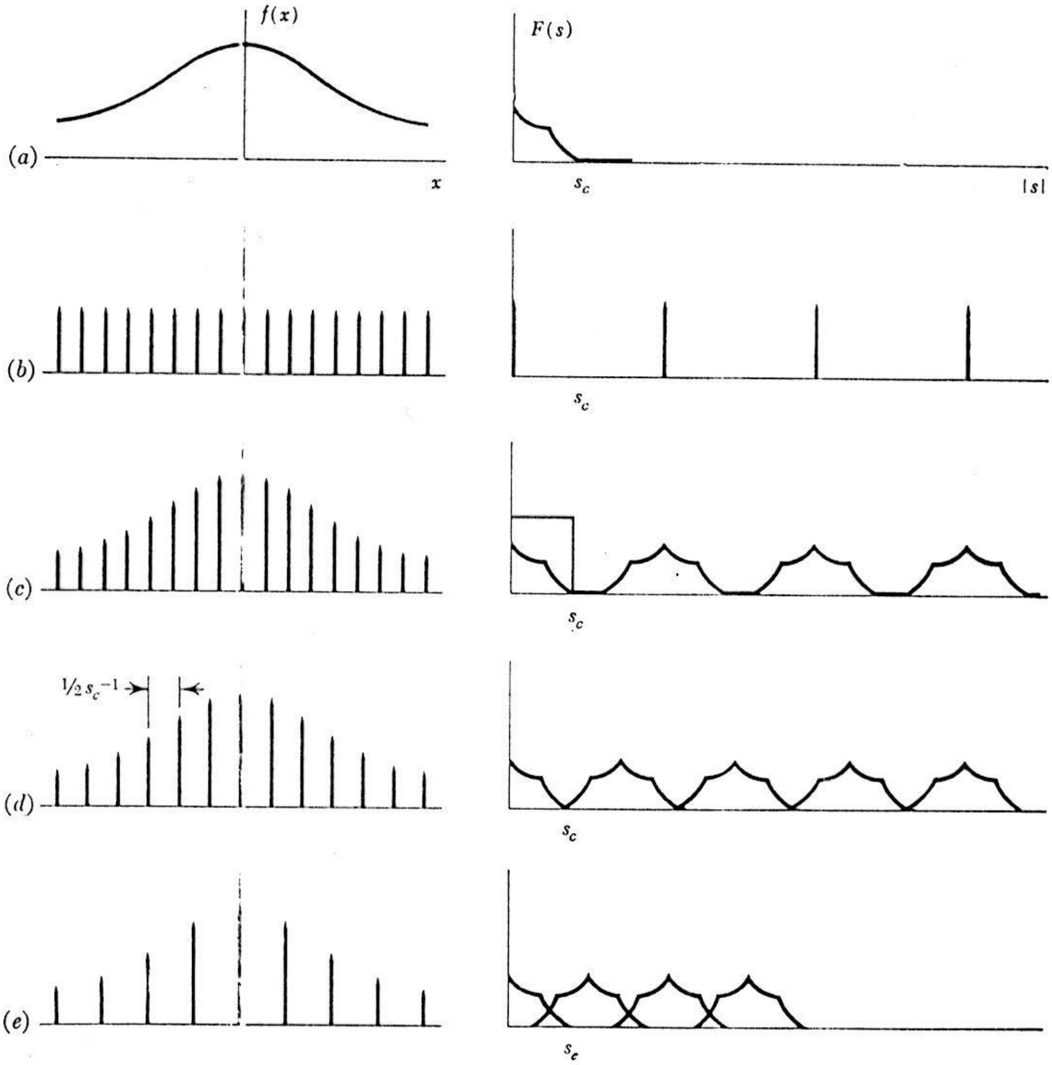
multiplier par fonction Shah

$\Leftrightarrow$

convoluer la T.F. par une fonction Shah

$\Leftrightarrow$

répliquer la T.F.



Conditions pour que la fonction puisse être reconstruite exactement :

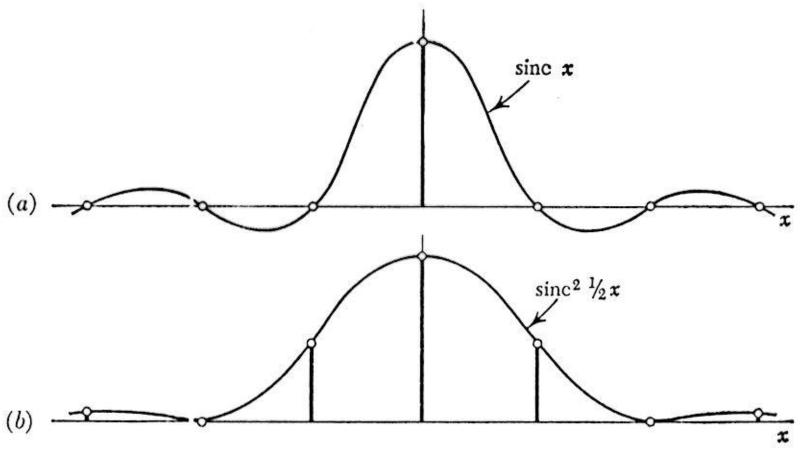
(1) sa T.F. ne doit pas contenir de fréquences supérieures à une valeur maximale u_c

(2) l'échantillonnage doit être réalisé avec un pas au plus égal à $\frac{1}{2u_c}$

La fréquence critique $u_c = \frac{1}{2\Delta x}$ correspondant au pas d'échantillonnage est appelée

fréquence de Nyquist

<u>*Exemples*</u> :



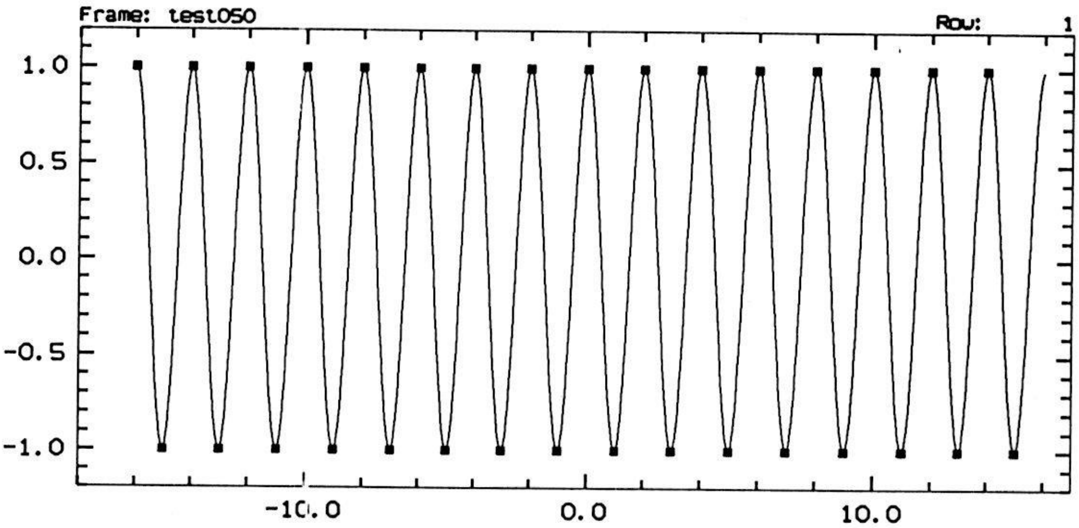
Aliasing

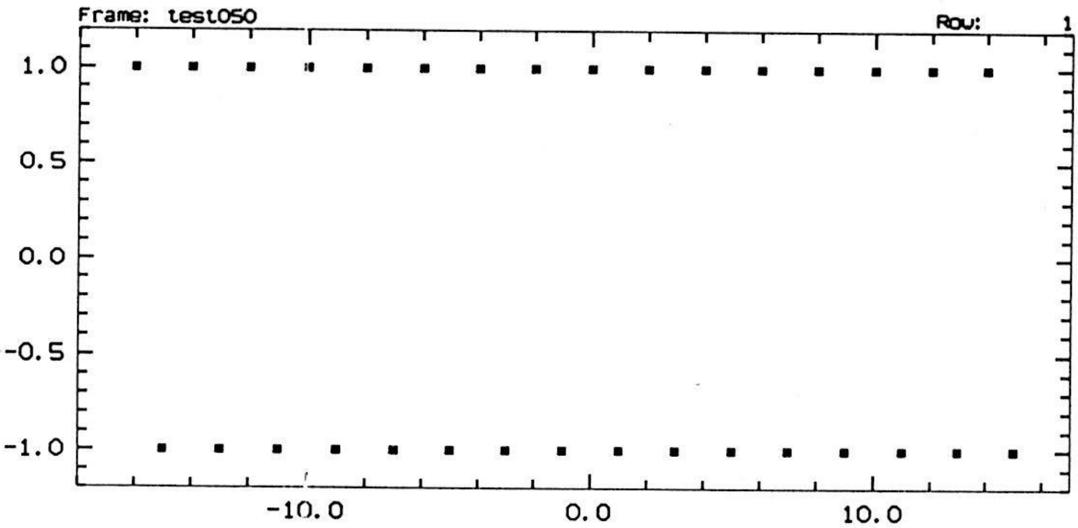
Si la fonction échantillonnée contient des fréquences $u > u_c = \frac{1}{2\Delta x}$, les composantes de fréquence $u = u_c + \delta u$ ne peuvent pas être distinguées des composantes de fréquence $u = u_c - \delta u$

Comme la FFT est calculée pour des fréquences $|u| \leq u_c$, les composantes de fréquence supérieure se ***superposent*** aux composantes de fréquences inférieures

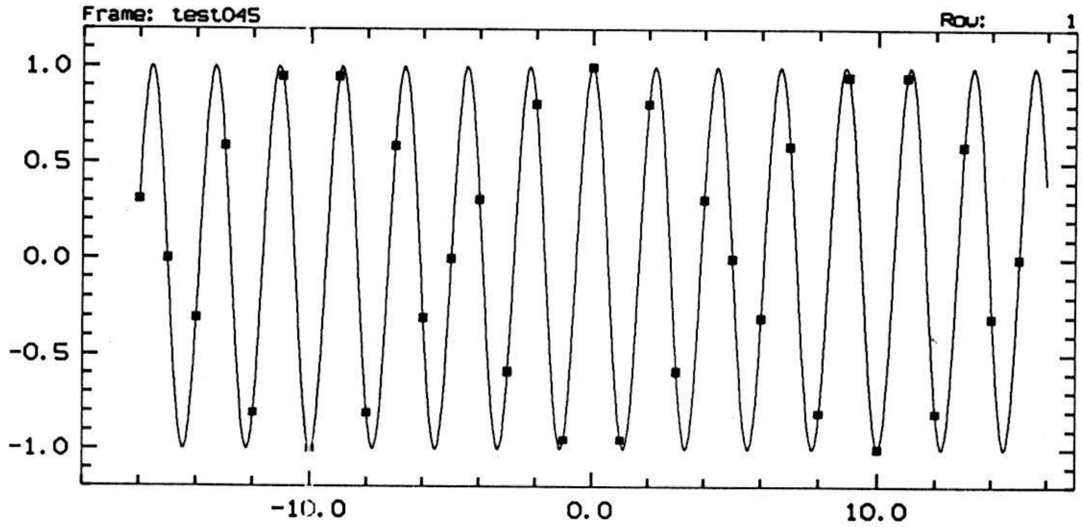
$\Rightarrow$ la fonction ne peut plus être reconstruite par interpolation à partir des échantillons.

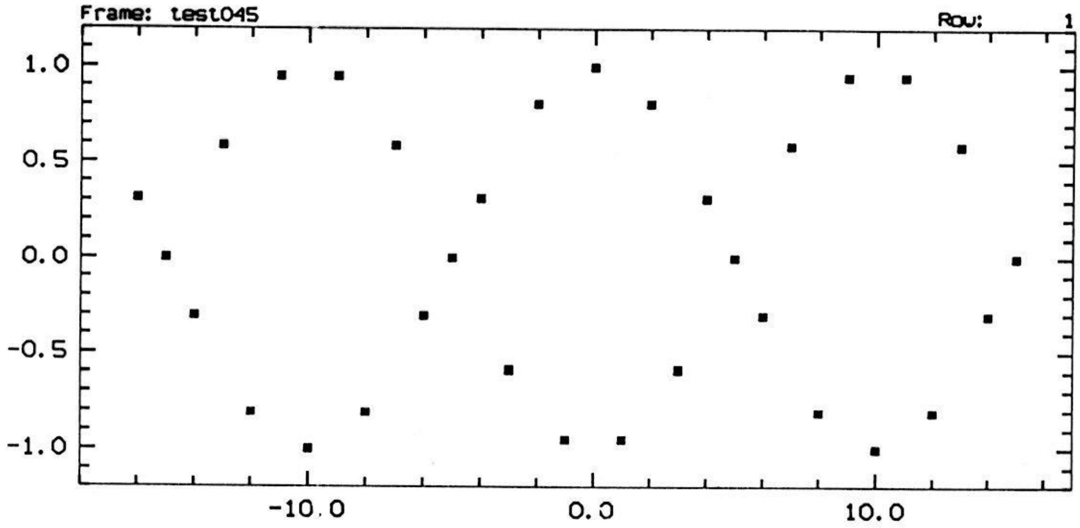
Cosinusoïde de fréquence $u = u_c$



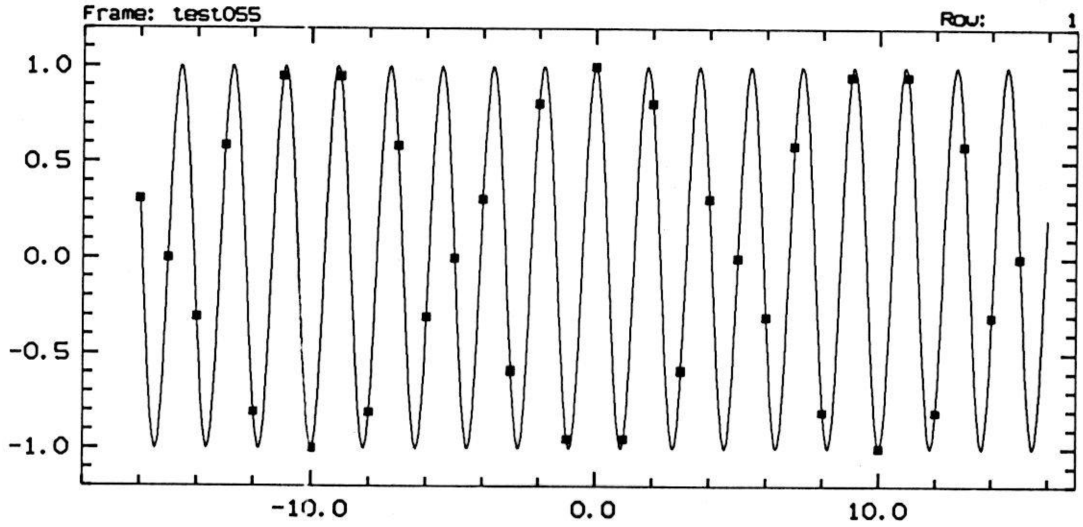


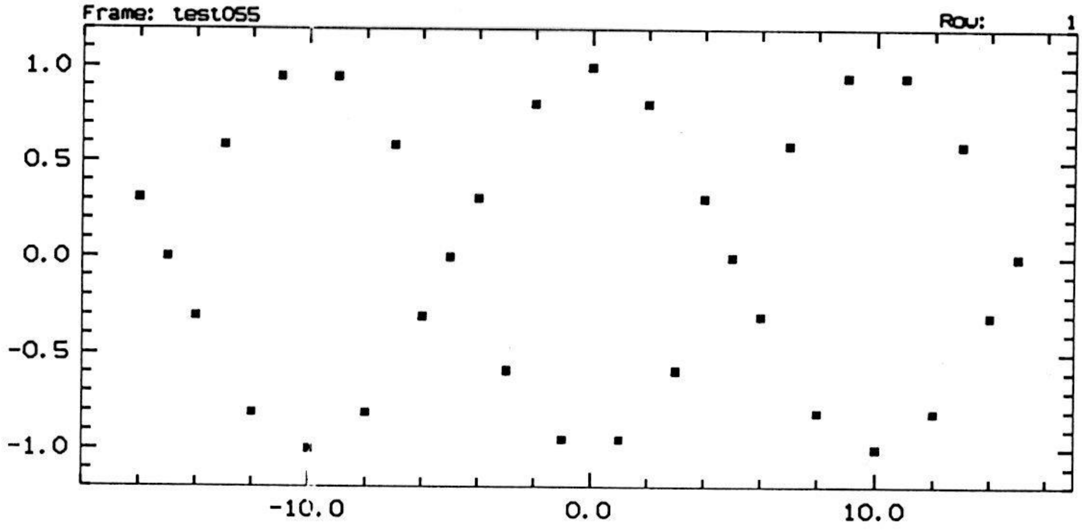
Cosinusoïde de fréquence $u = 0.9\,u_c$



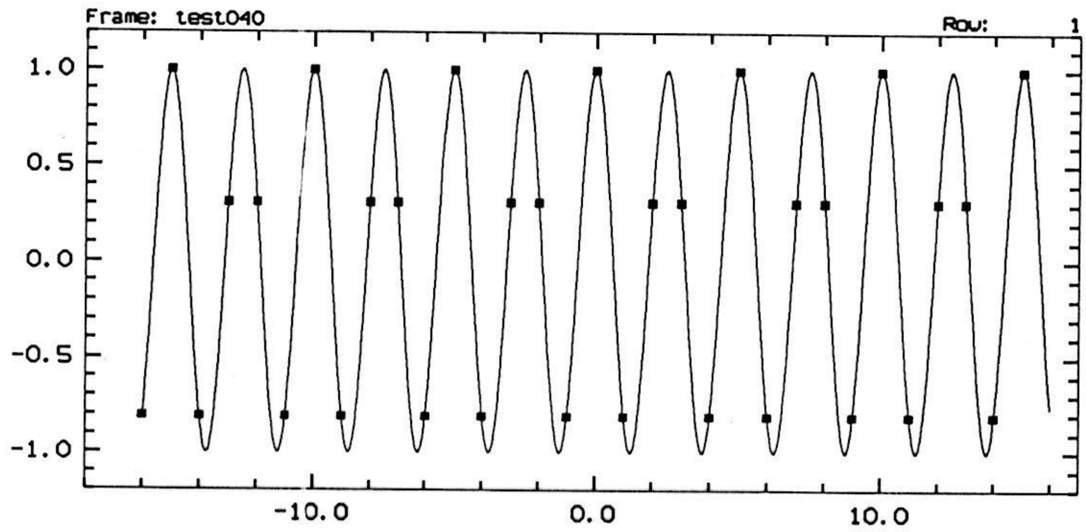


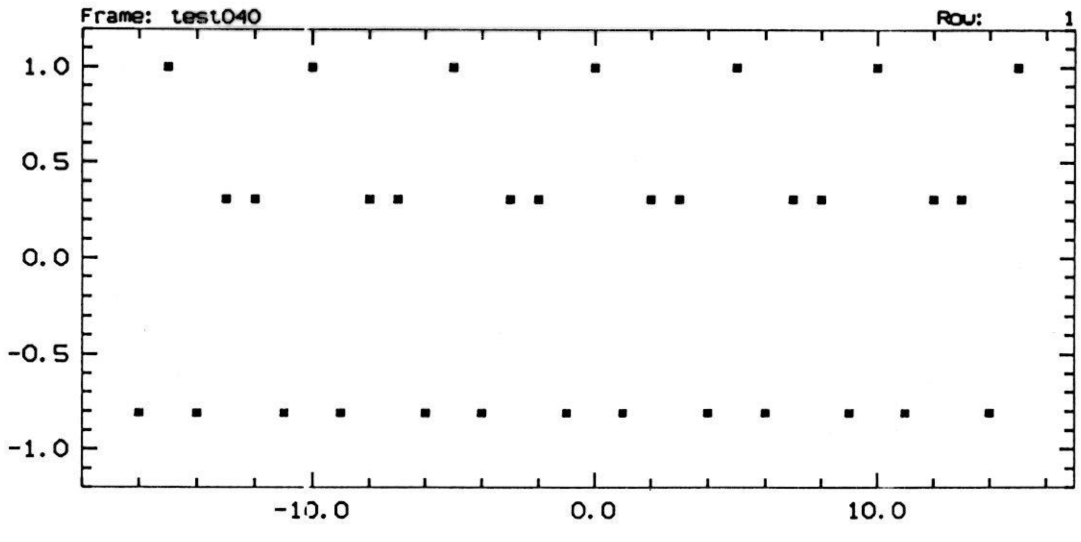
Cosinusoïde de fréquence $u = 1.1\, u_c$



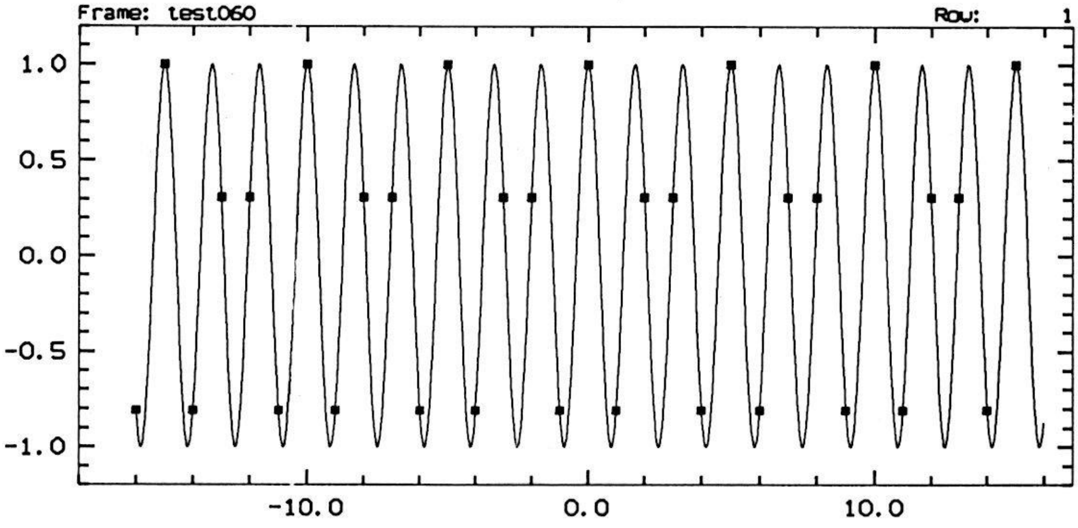


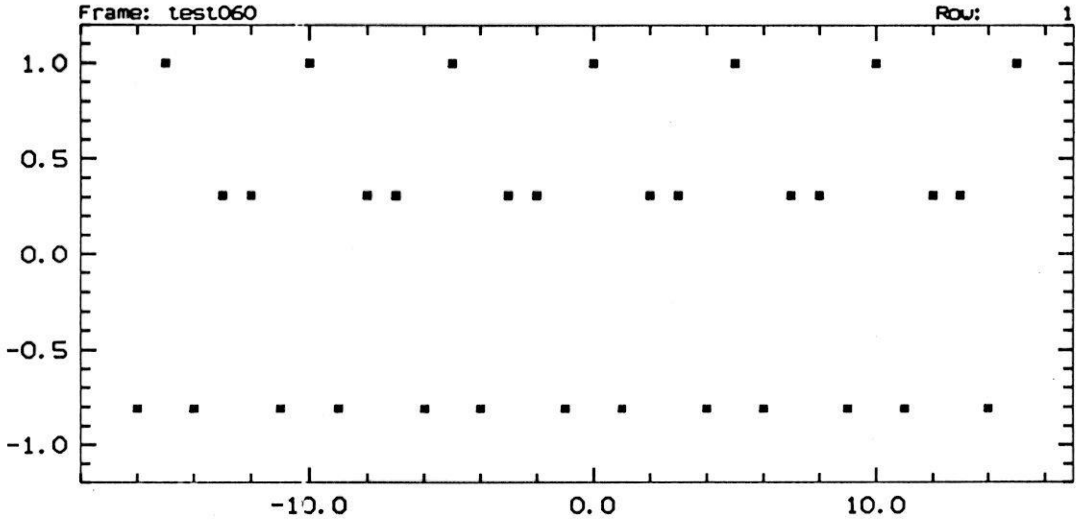
Cosinusoïde de fréquence $u = 0.8\,u_c$



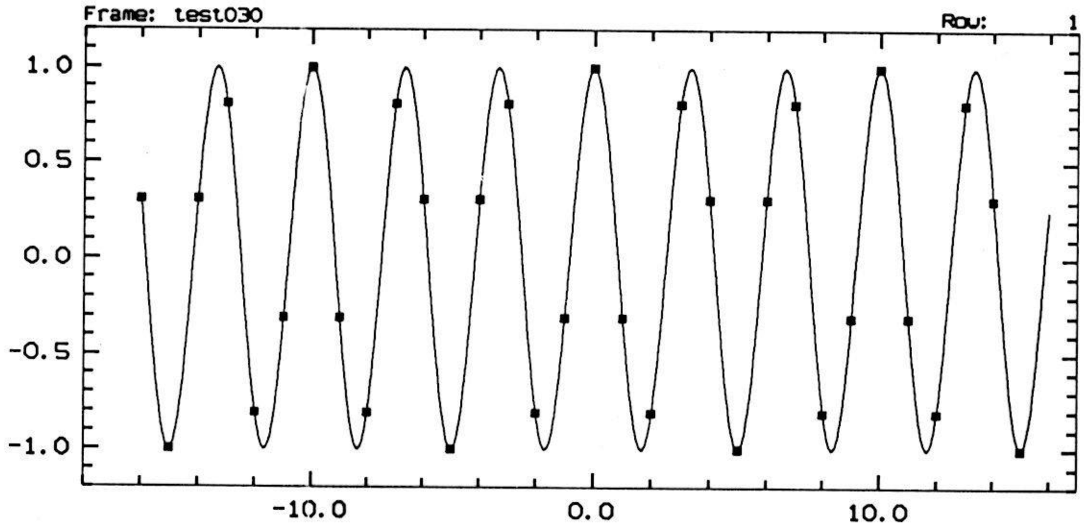


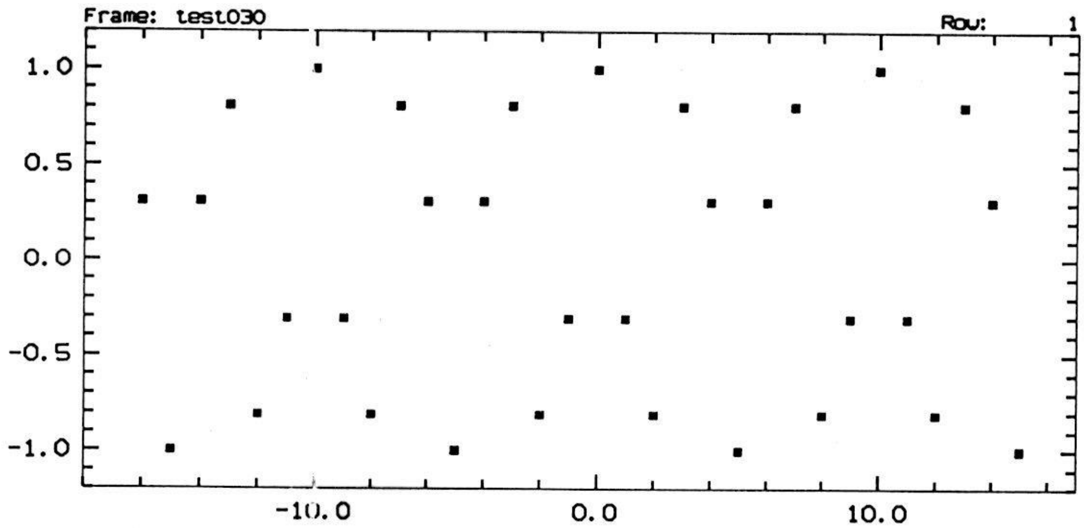
Cosinusoïde de fréquence $u = 1.2\,u_c$



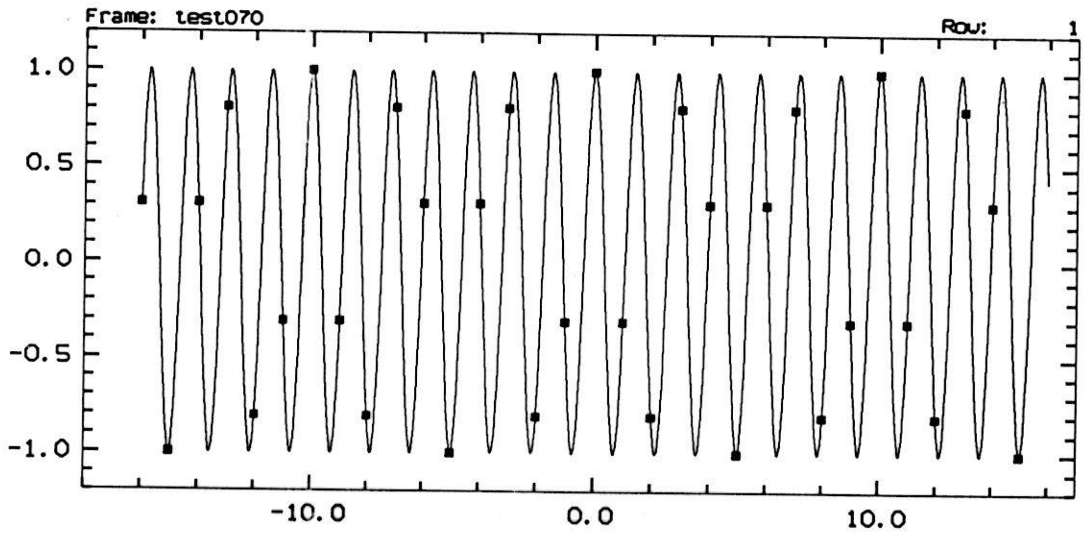


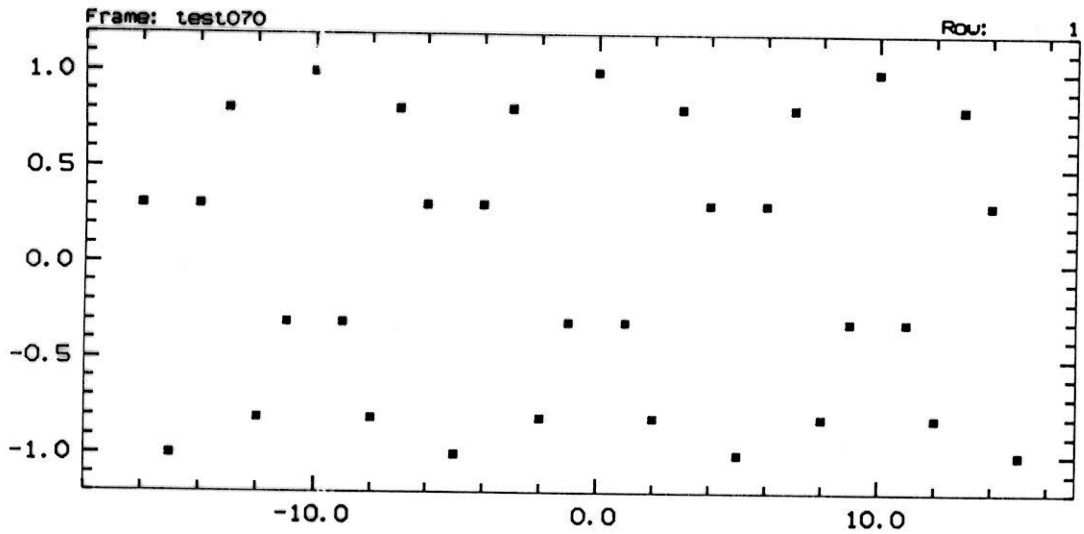
Cosinusoïde de fréquence $u = 0.6\,u_c$



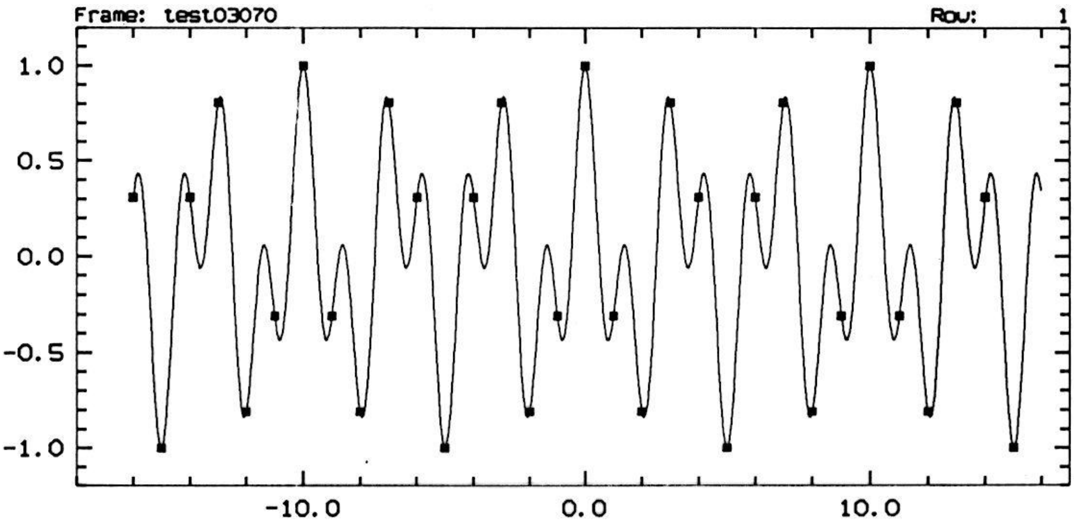


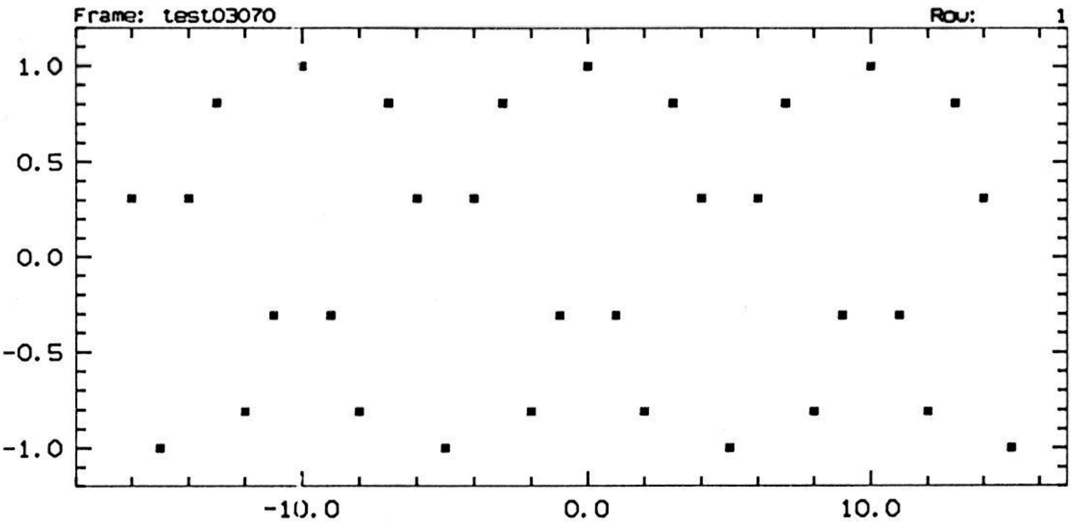
Cosinusoïde de fréquence $u = 1.4\, u_c$





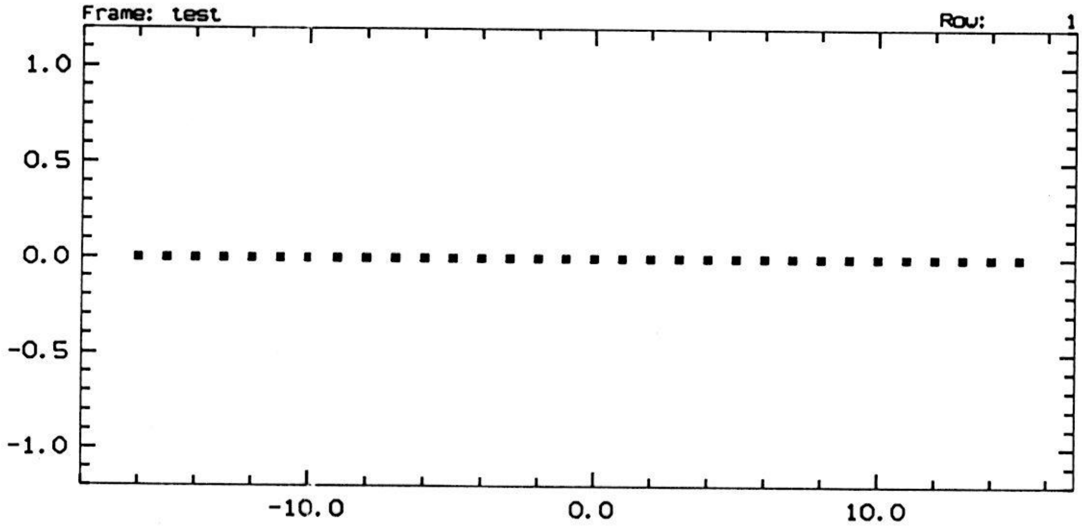
Superposition de cosinusoïdes de fréquences $u = 0.6u_c$ et $u = 1.4\,u_c$





Exercice :

Quelle est la fonction dont un échantillon est représenté ci-dessous ?



Interpolation

= reconstruction de la fonction continue à partir des échantillons

$\Rightarrow$ multiplier la T.F. périodique par une fonction rectangle qui isole une période

$$\Leftrightarrow \text{convoluer par } \frac{\sin x}{x}$$

Réalisation pratique :

On désire interpoler $f_i \quad (i = 1, \ldots, N_1)$

Calculer la FFT F_j en N_1 points espacés de $\Delta u = \frac{1}{N_1 \Delta x}$

Prolonger F_j par des zéros jusqu'à obtenir $N_2 = kN_1$ points (k = entier positif)

$\Rightarrow$ la FFT inverse est une fonction échantillonnée en N_2 points, espacés de

$$\Delta x' = \frac{1}{N_2 \Delta u} = \frac{N_1 \Delta x}{N_2} = \frac{\Delta x}{k}$$

Oscillations de Gibbs

Si $f(x)$ contient des composantes de fréquences $u > u_c$

Question : que deviennent ces composantes dans la T.F.D. ?

Réponse : ...

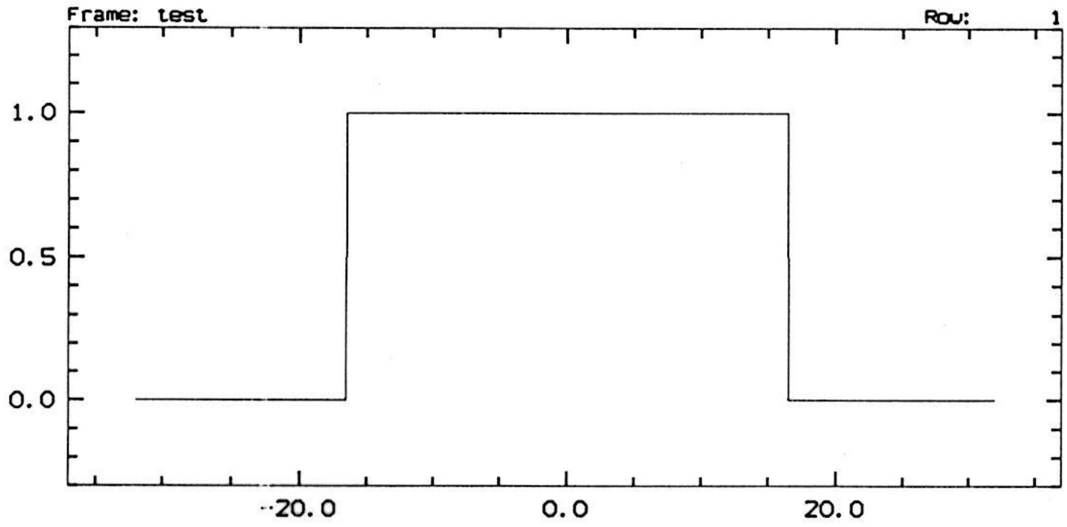
En prolongeant la T.F. par des zéros, on introduit une discontinuité

Or, la T.F. d'une fonction discontinue contient des oscillations :

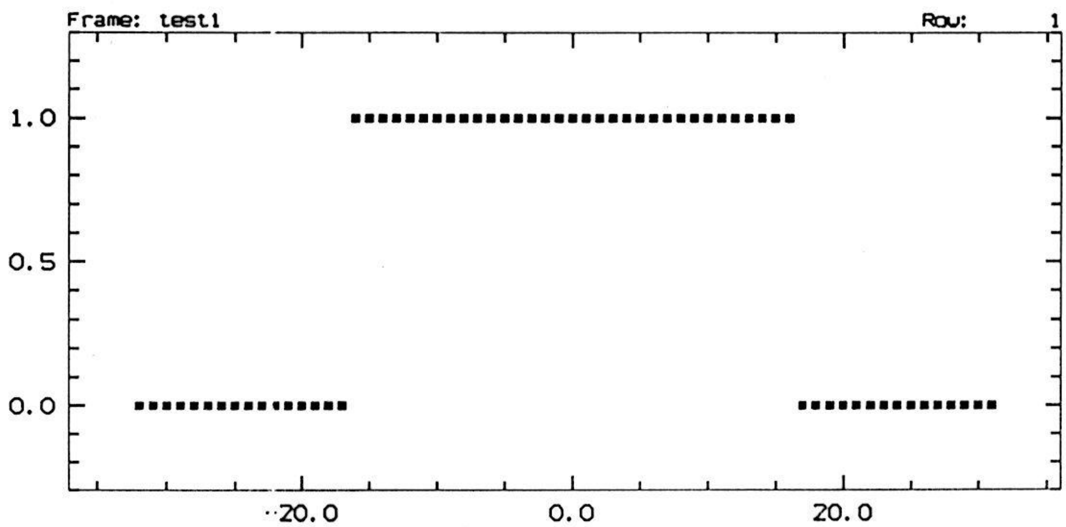
c'est le *phénomène de Gibbs*

$\Rightarrow$ la fonction interpolée tend à présenter un caractère oscillatoire entre les points d'échantillonnage

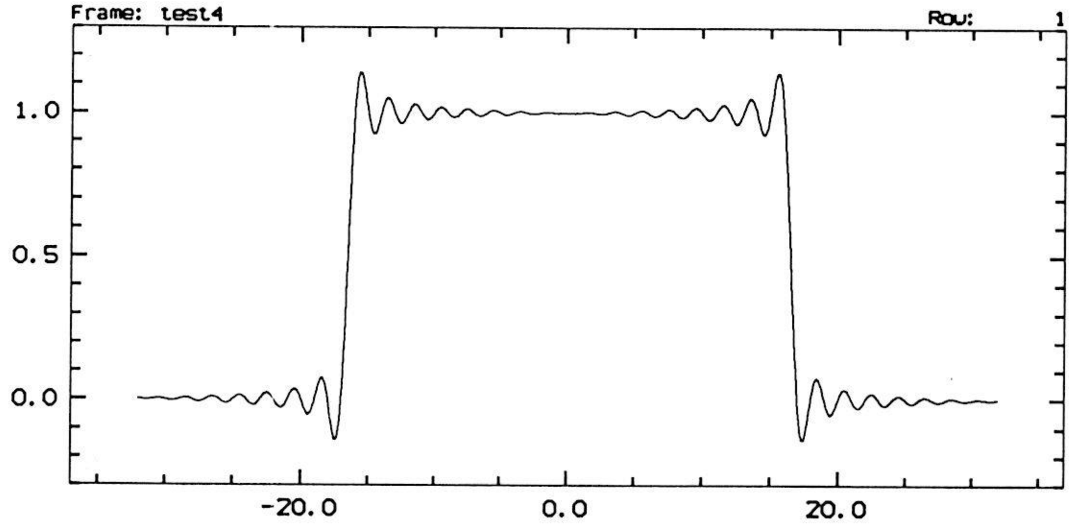
Exemple 1 : fonction rectangle



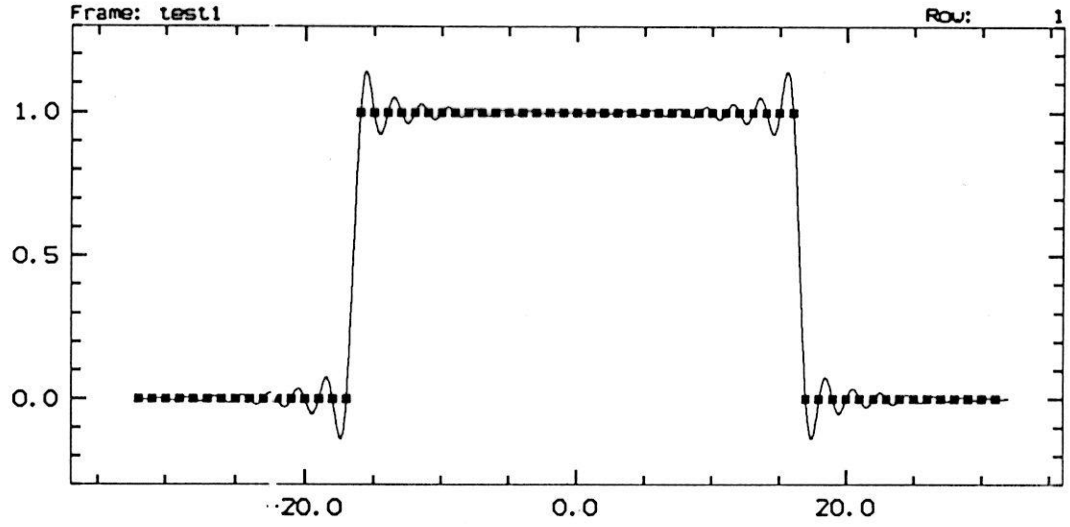
Echantillons



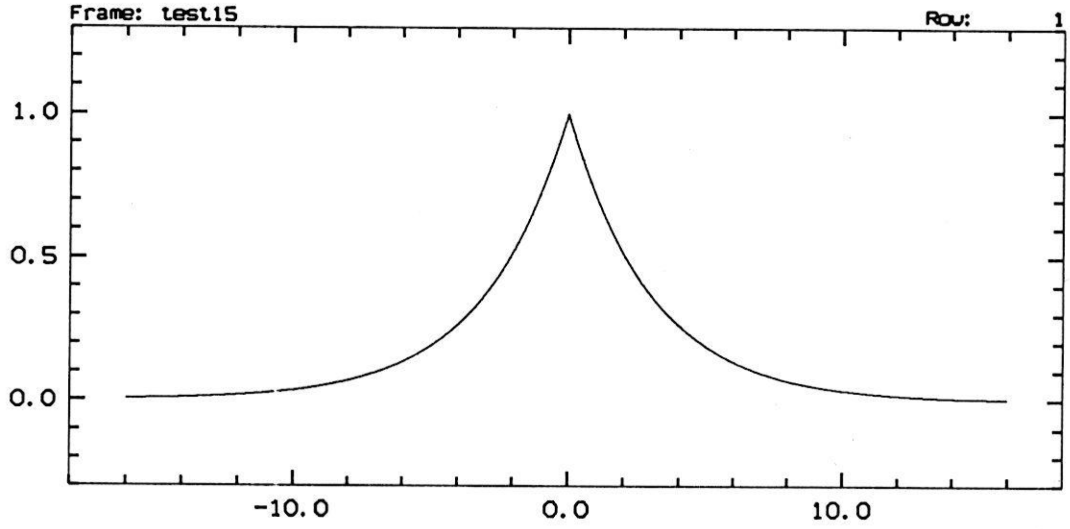
Interpolation



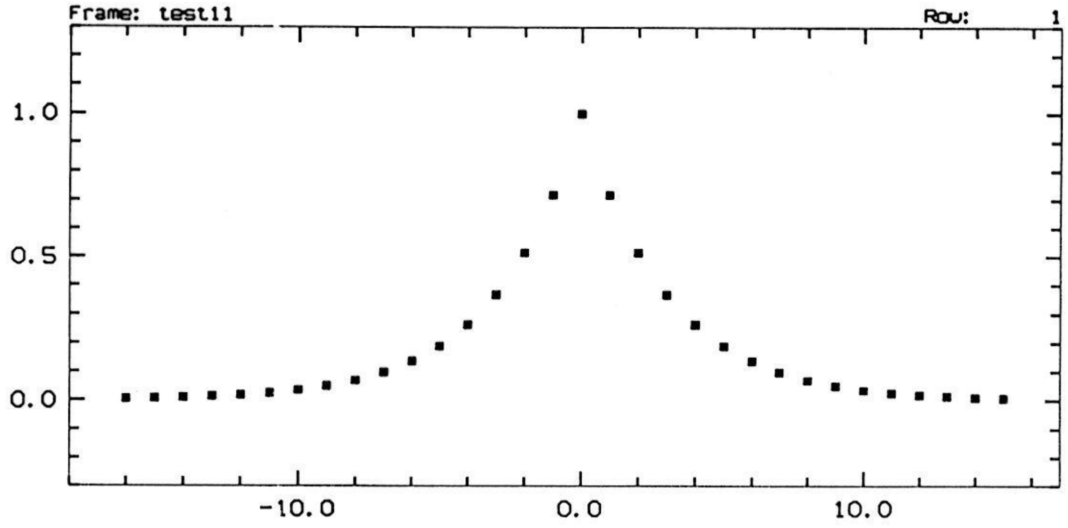
Echantillons et interpolation



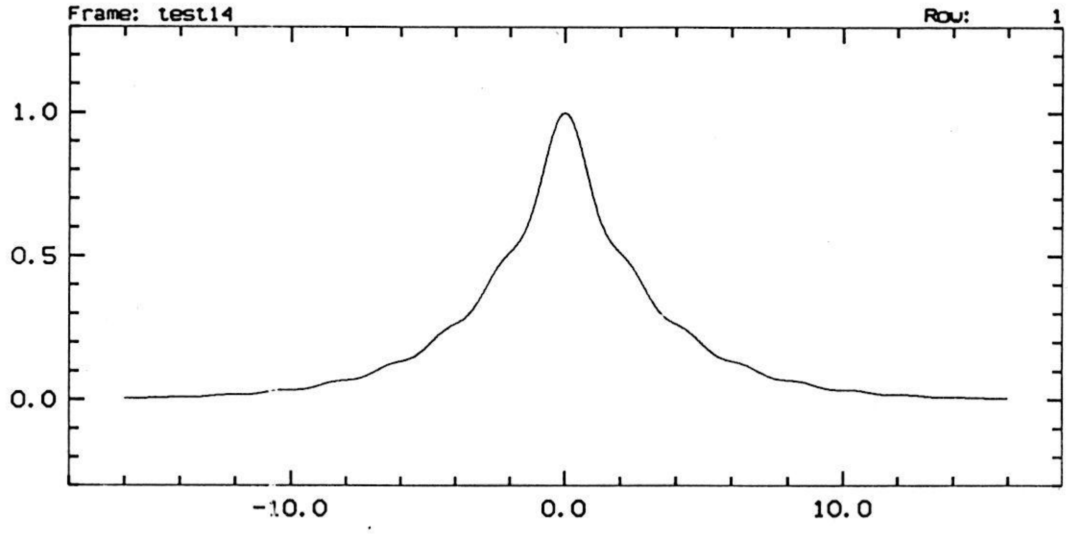
Exemple 2 : fonction exponentielle négative



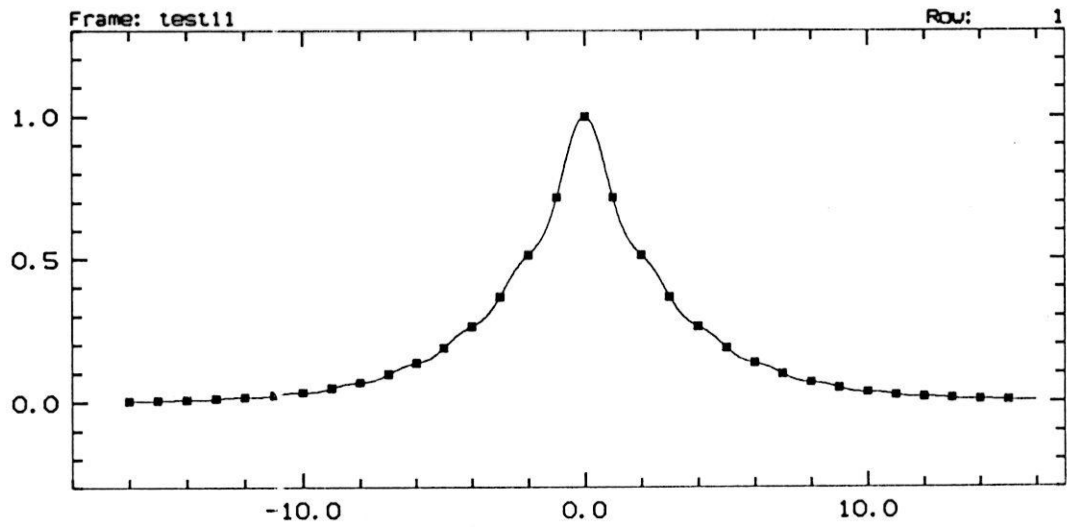
Echantillons



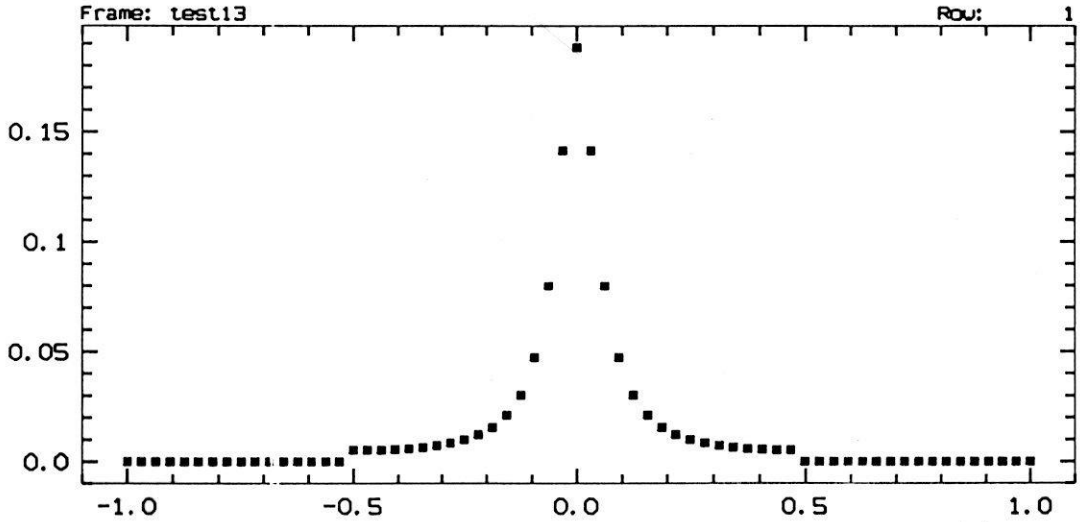
Interpolation



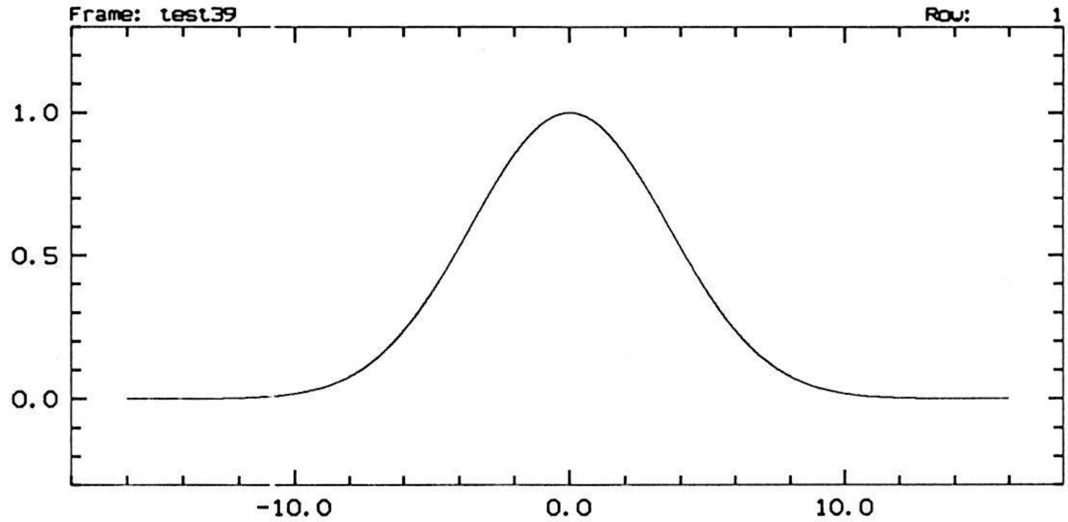
Echantillons et interpolation



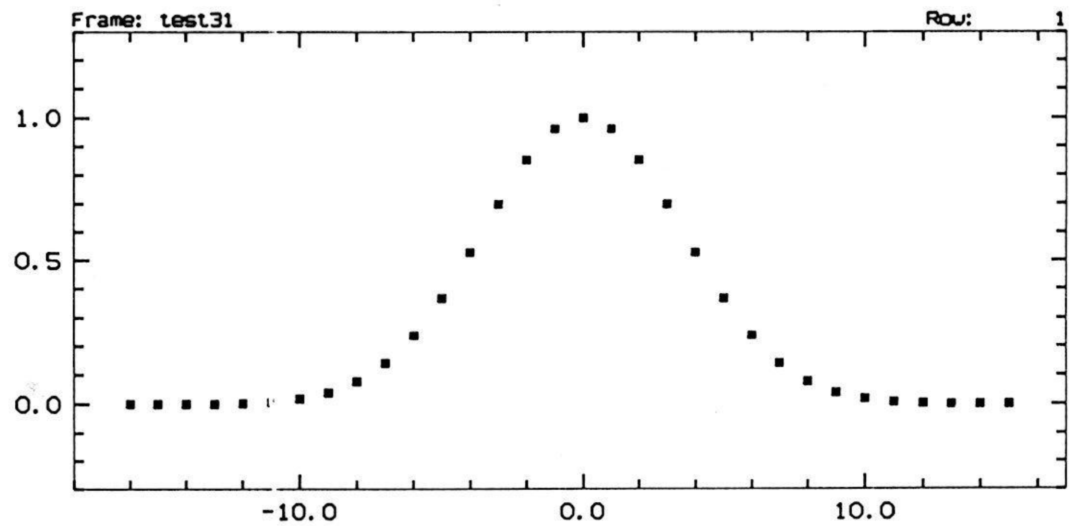
Partie centrale de la T.F. «prolongée»



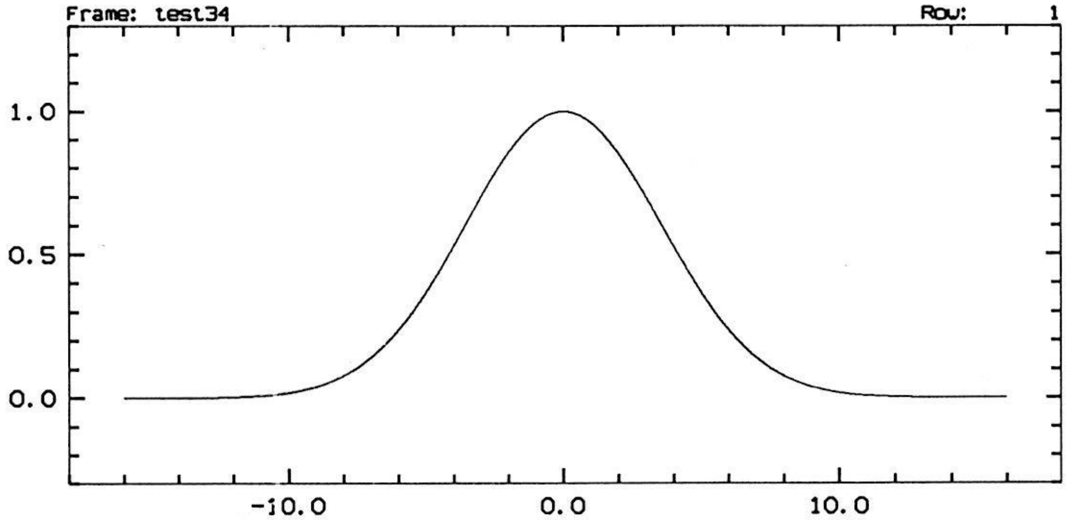
Exemple 3 : fonction gaussienne



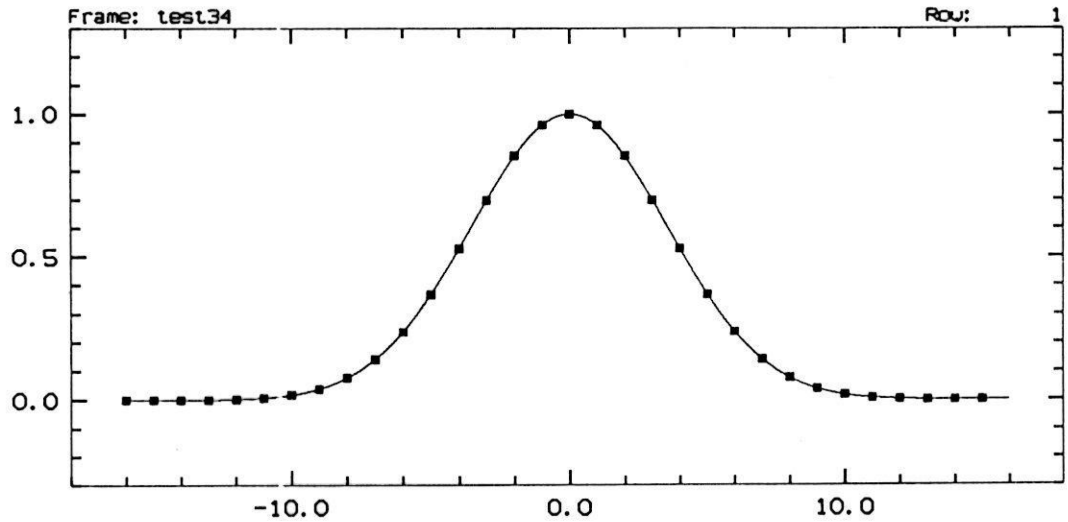
Echantillons



Interpolation



Echantillons et interpolation



Réduction des oscillations de Gibbs

Réduire la discontinuité de la T.F.

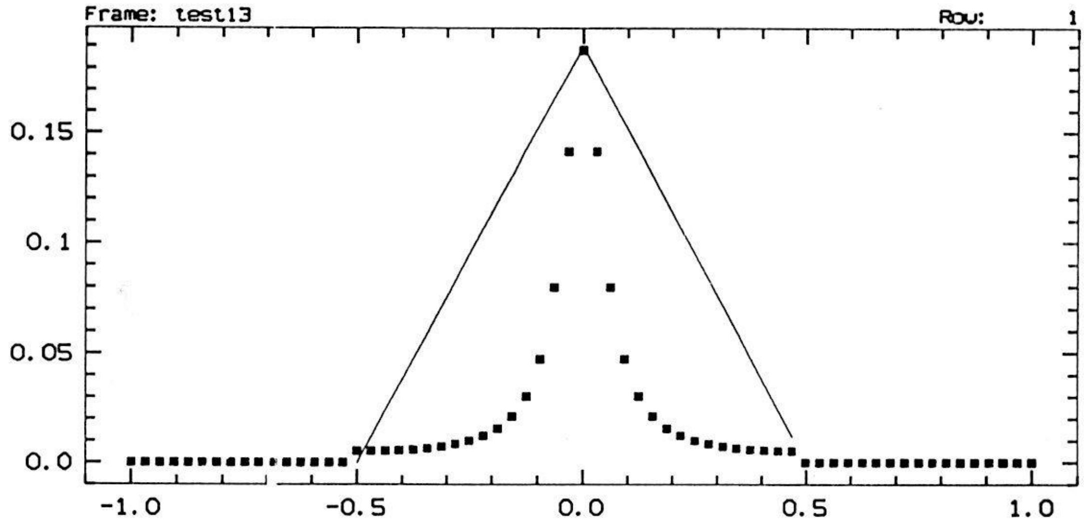
⇒ multiplier la T.F. par une fonction « fenêtre » qui atténue les fréquences proches de la fréquence de Nyquist

Inconvénient : on atténue également des fréquences « utiles »

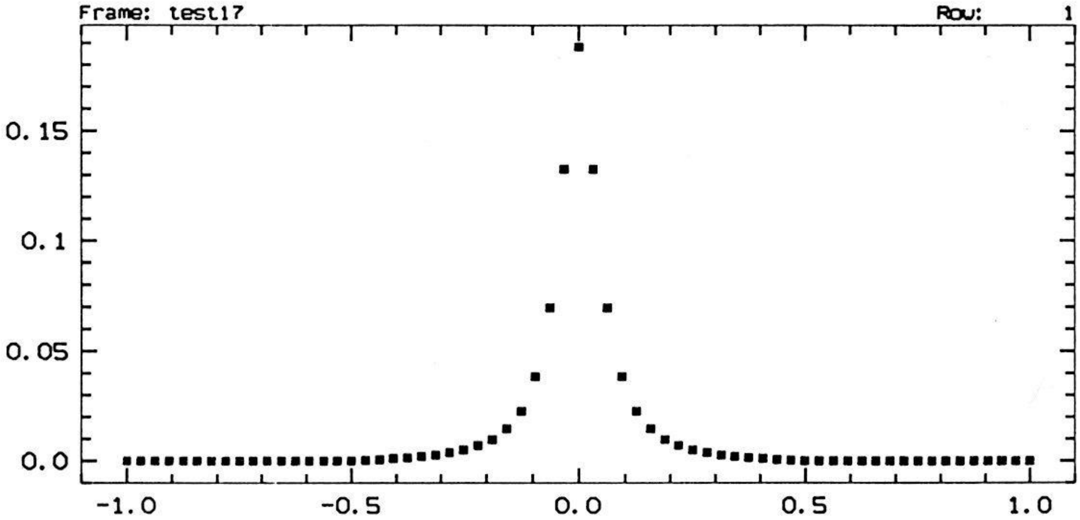
⇒ la fonction ne passe plus exactement par les points (ce n'est plus une *interpolation* au sens propre)

Exemple : fonction exponentielle négative

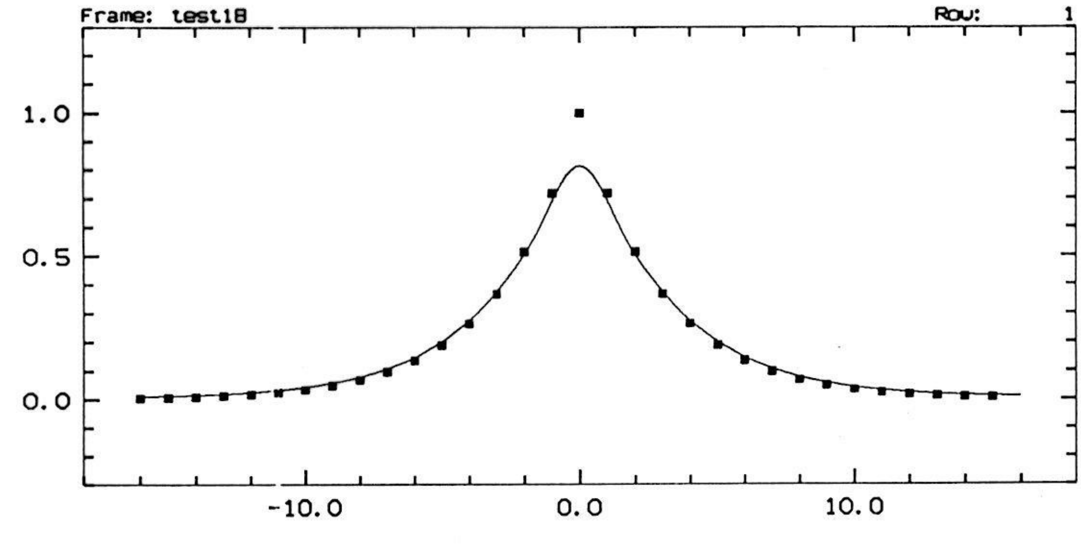
Transformée de Fourier « prolongée » et fonction fenêtre



Transformée de Fourier modifiée



« Interpolation »



Influence du bruit

Le bruit contient généralement des composantes de fréquences élevées

Le bruit échantillonné contiendra donc des composantes jusqu'à la fréquence de Nyquist

⇒ la présence de bruit produira une discontinuité dans la T.F. « prolongée », même dans le cas d'une fonction ne contenant pas de fréquences élevées

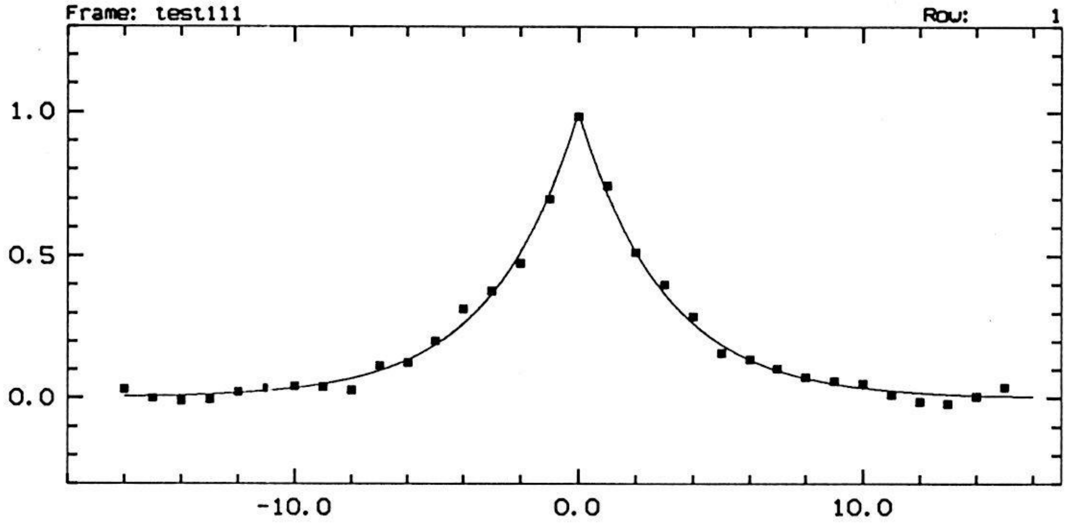
Solution :

Analogue au cas précédent :

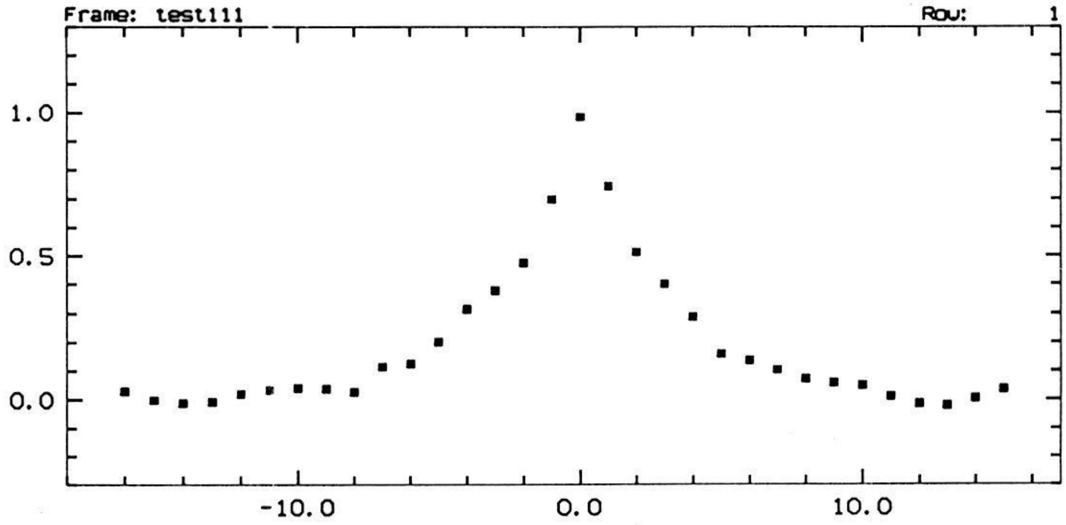
On multiplie la T.F. par une fonction « fenêtre » qui atténue les fréquences proches de la fréquence de Nyquist

Dans tous les cas, cette multiplication par une fonction « fenêtre » revient à une convolution dans l'espace des données ⇒ ***filtrage***

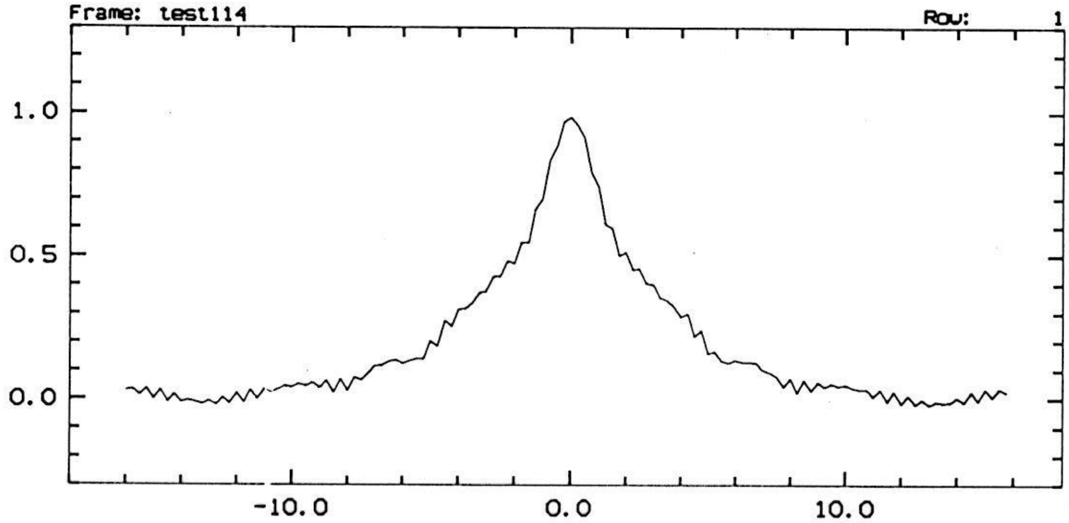
Exemple 1 : fonction exponentielle négative



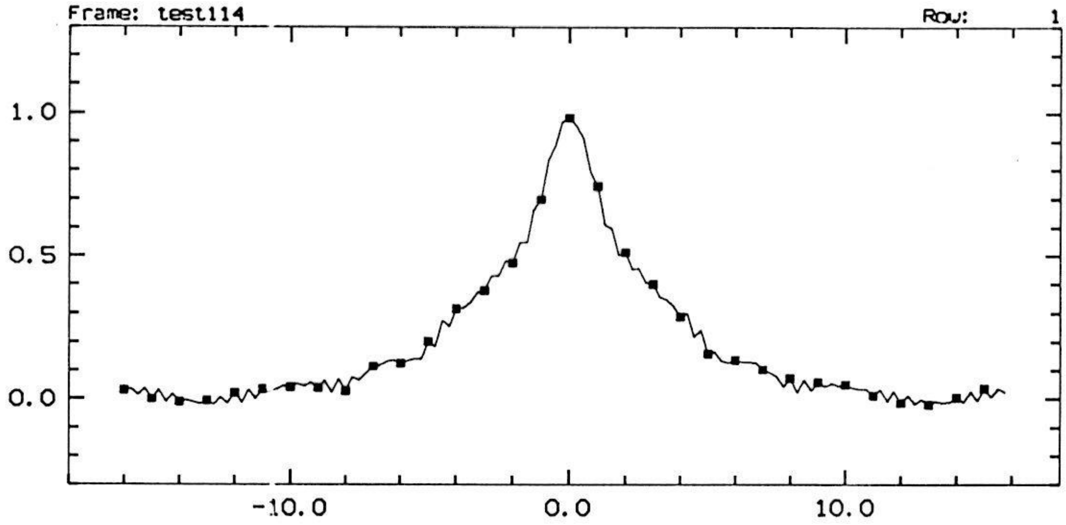
Echantillons



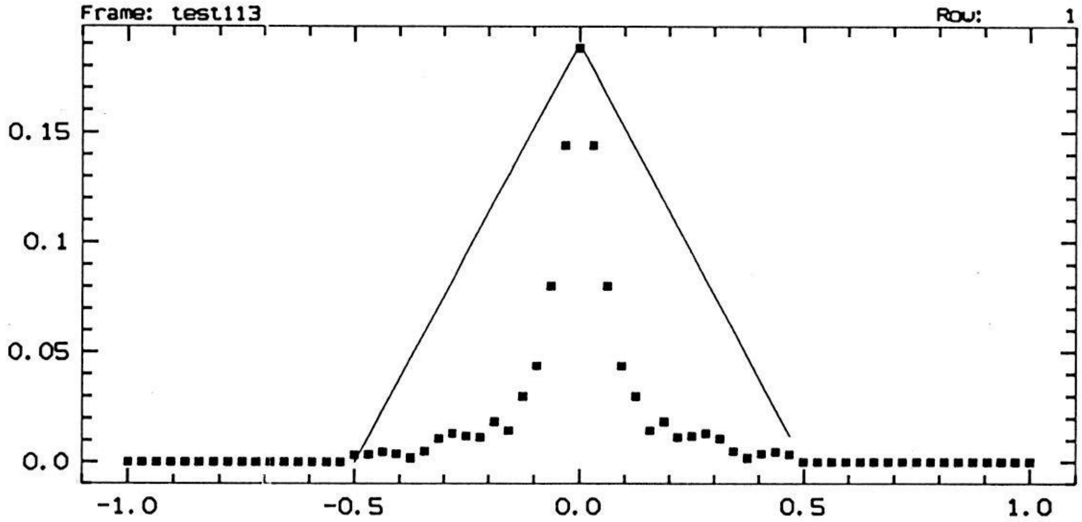
Interpolation ($N_2 = 4N_1$)



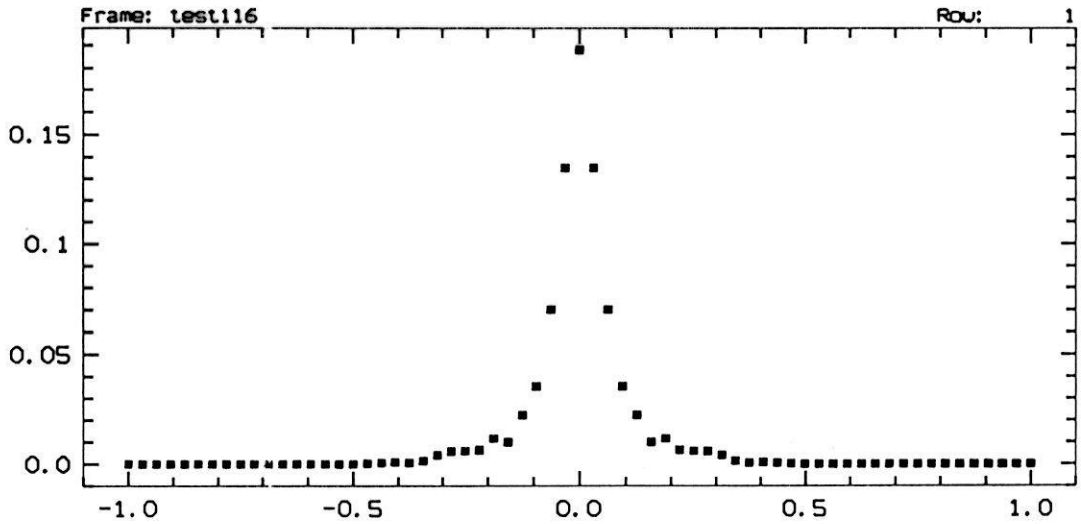
Echantillons et interpolation



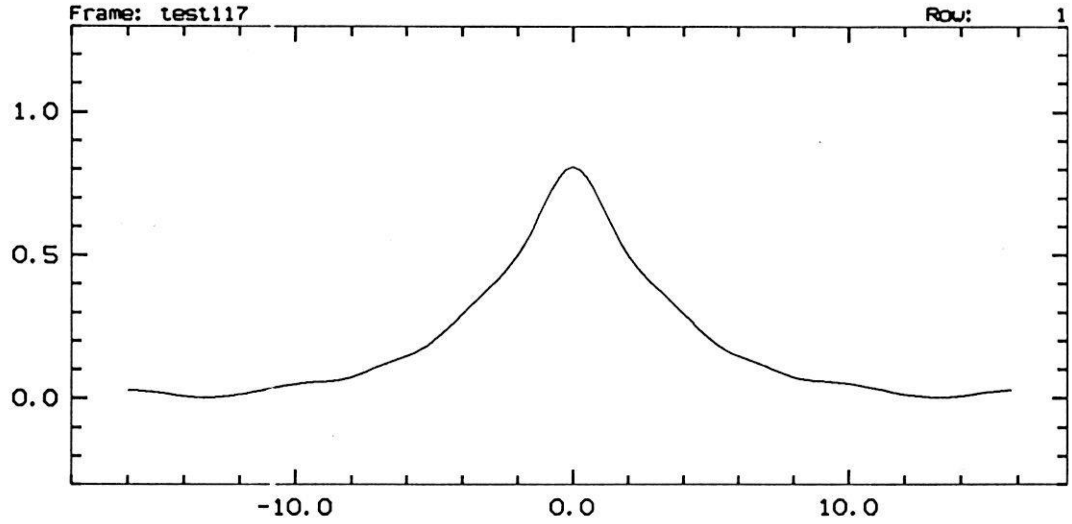
Transformée de Fourier et « fenêtre »



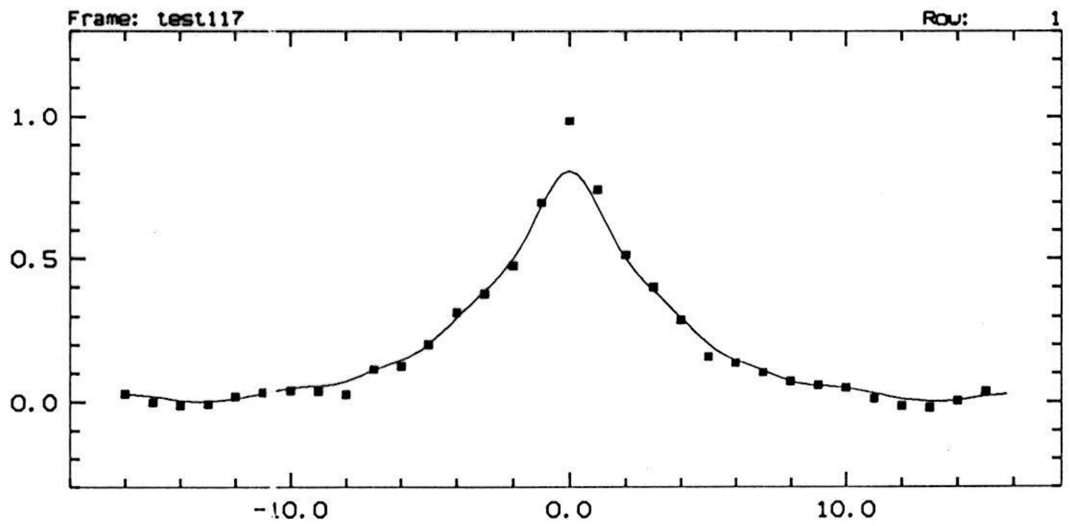
Transformée de Fourier modifiée



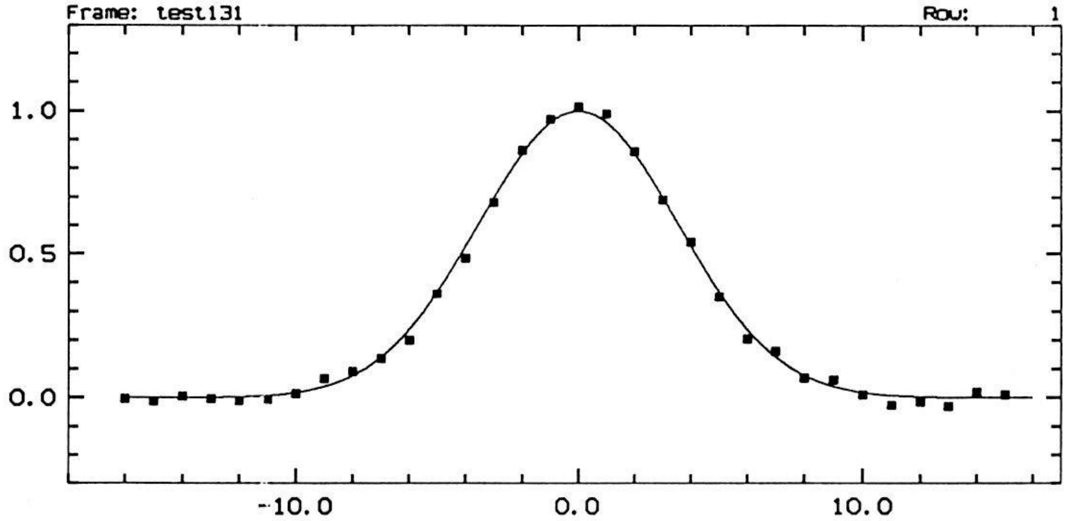
Reconstruction



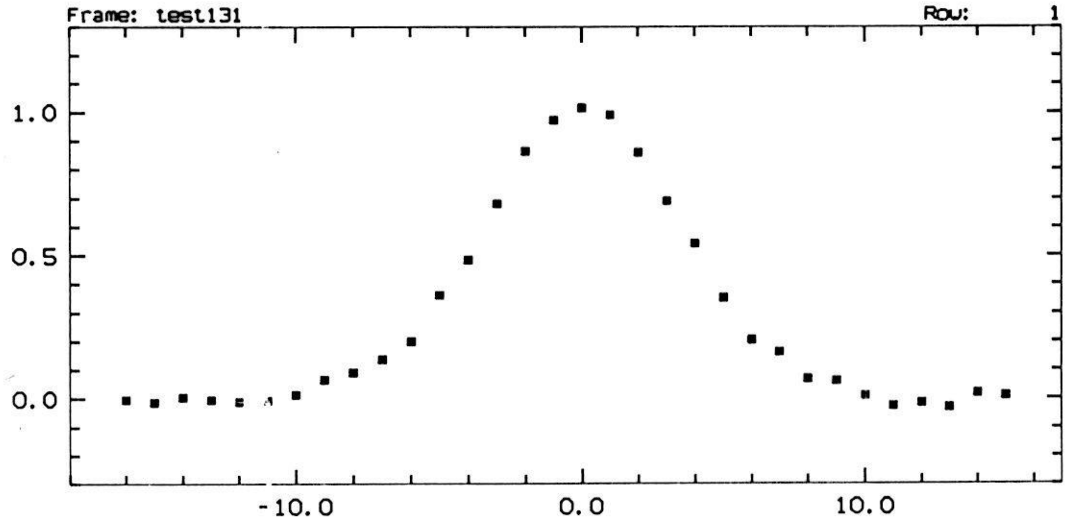
Reconstruction et échantillons



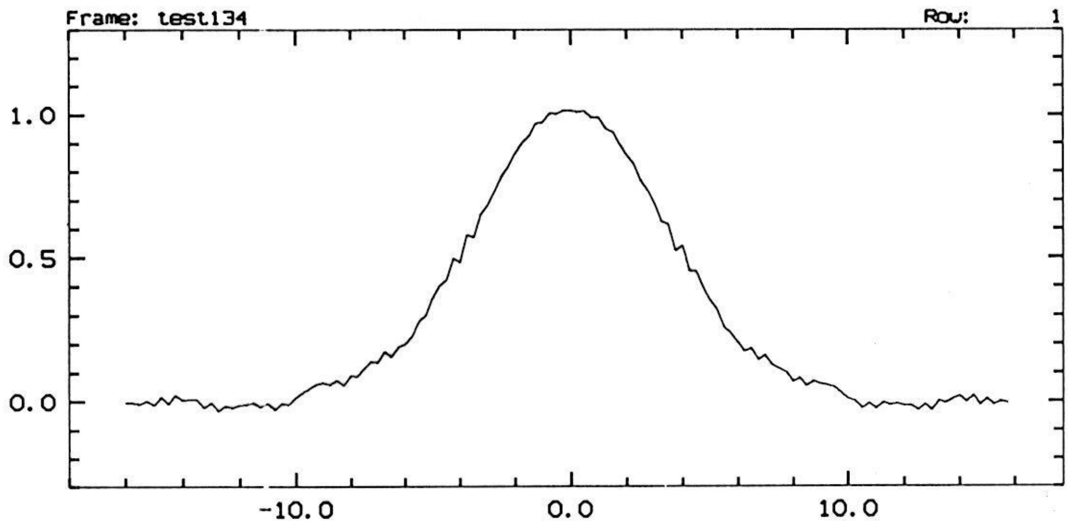
Exemple 2 : fonction gaussienne



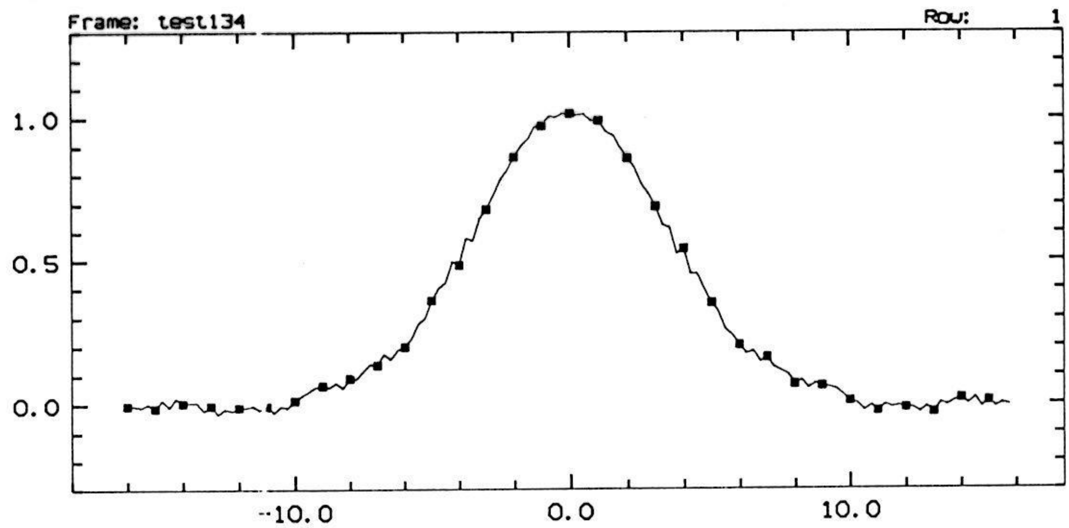
Echantillons



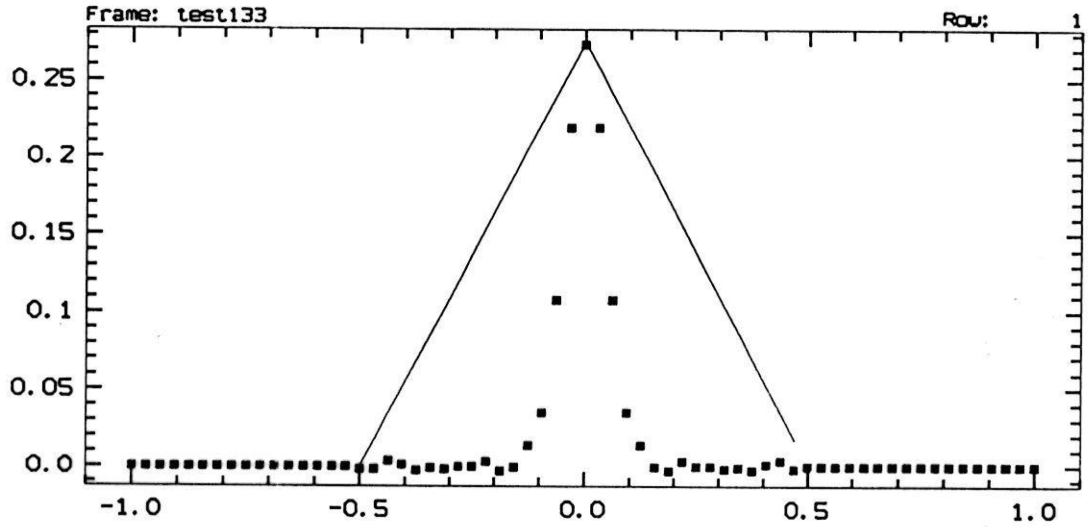
Interpolation ($N_2 = 4N_1$)



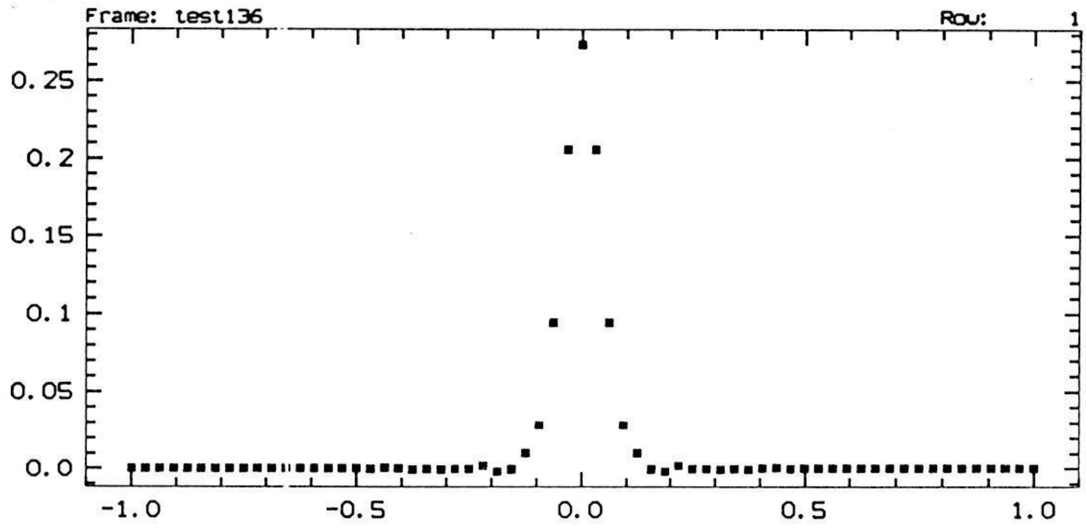
Echantillons et interpolation



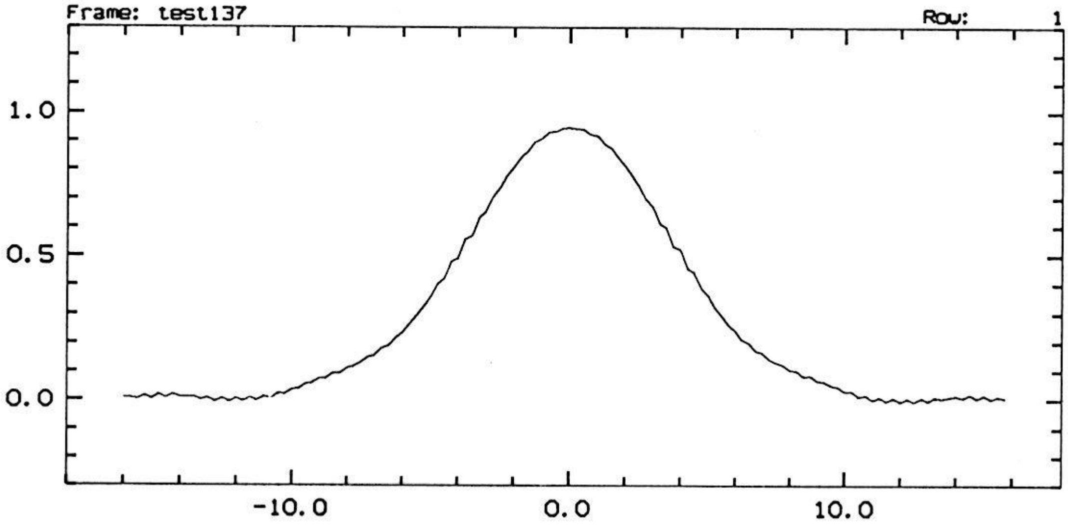
Transformée de Fourier et «fenêtre»



Transformée de Fourier modifiée



Reconstruction



Reconstruction et échantillons