Chapitre 6

Analyse spectrale

1. Densité spectrale
2. Influence du bruit
3. Etalement des fréquences
4. Fenêtrage

Densité spectrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(u)|^2\,du$$

$$= \int_0^{+\infty} \left[|F(u)|^2 + |F(-u)|^2\right] du$$

Si $f(x)$ est réel $\Rightarrow |F(-u)| = |F(u)|$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx = 2\int_0^{+\infty} |F(u)|^2\,du$$

Densité spectrale :

$$P(u) = 2\,|F(u)|^2$$

mesure la « quantité d'énergie » contenue dans le signal réel f, à la fréquence u

Influence du bruit

Si $f(x)$ est un « bruit blanc » :

la densité spectrale estimée à une fréquence u est distribuée suivant une loi du χ^2 à 2 degrés de liberté

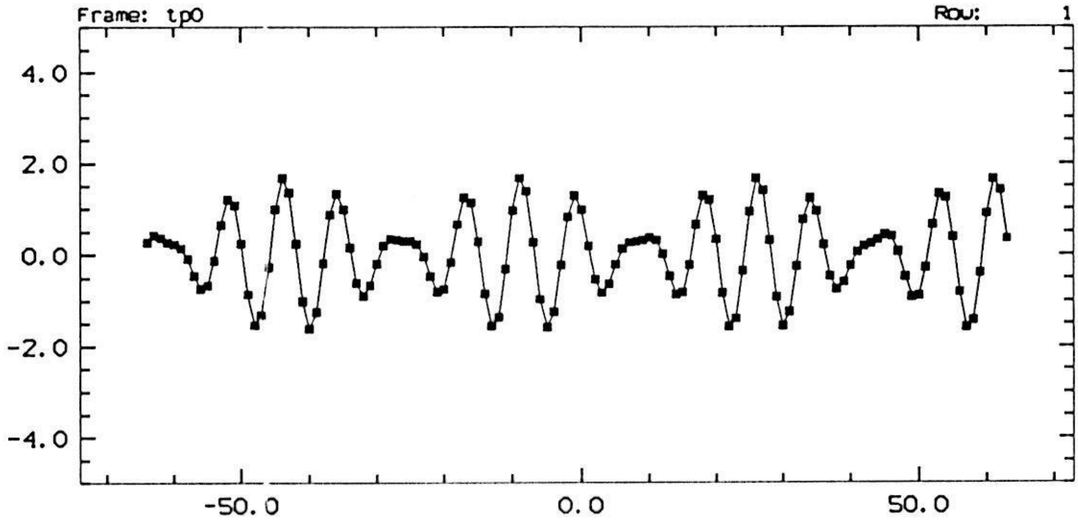
$\Rightarrow$ loi exponentielle

Or, pour une telle loi, l'écart-type est égal à la moyenne :

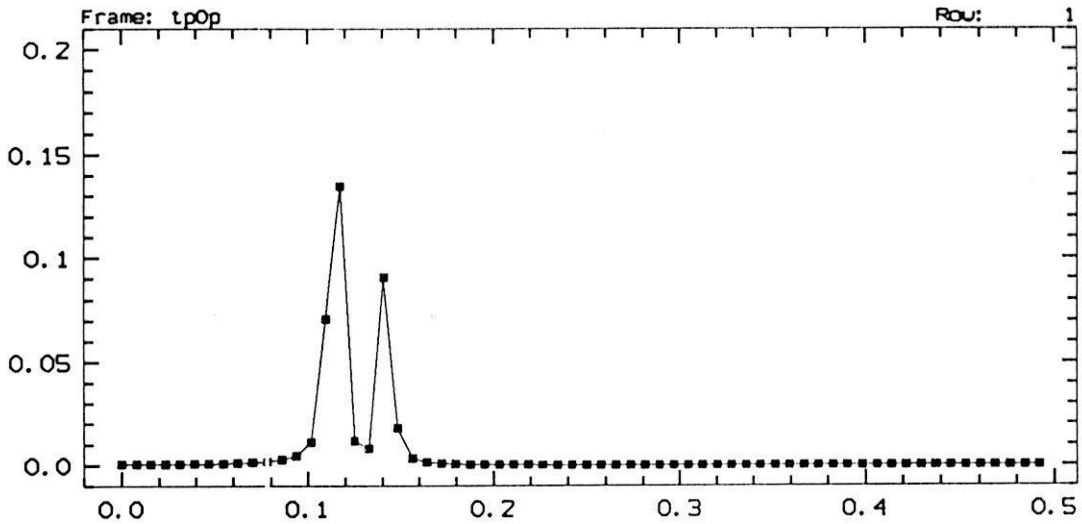
$$\sigma = \mu$$

L'incertitude sur la densité spectrale estimée à une fréquence donnée est donc de 100%

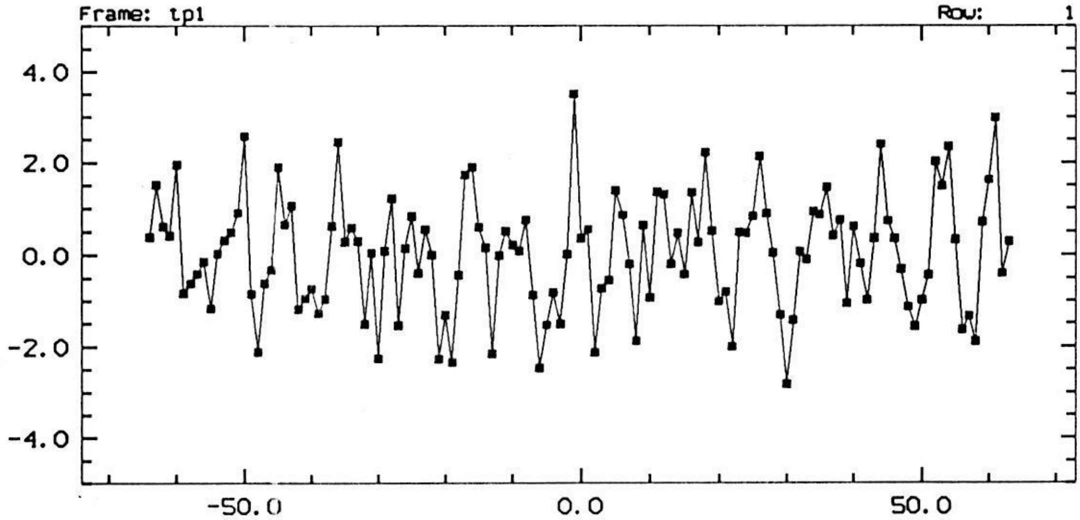
Exemple : $f(x) =$ somme de deux sinusoïdes de fréquences voisines



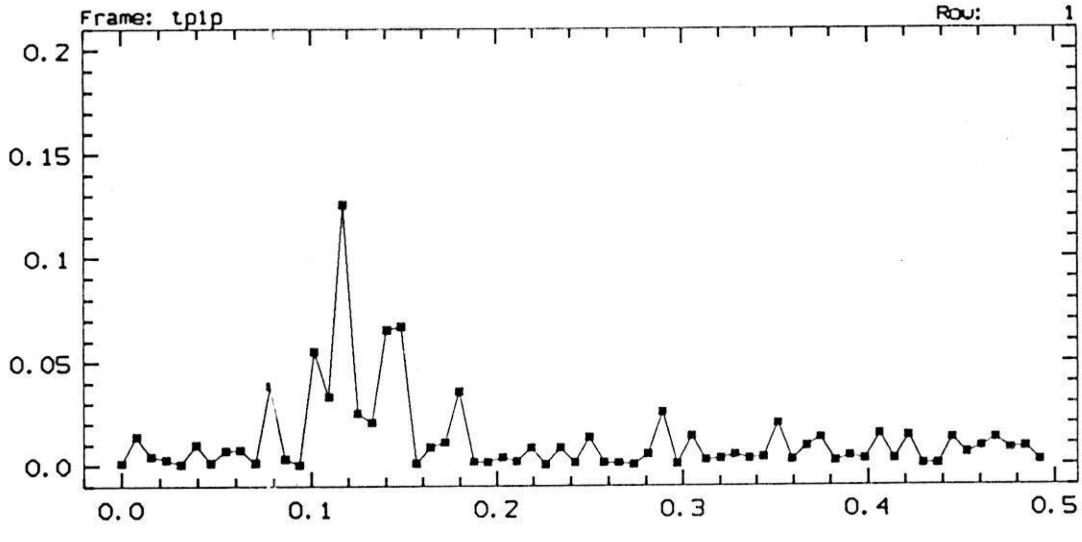
Densité spectrale



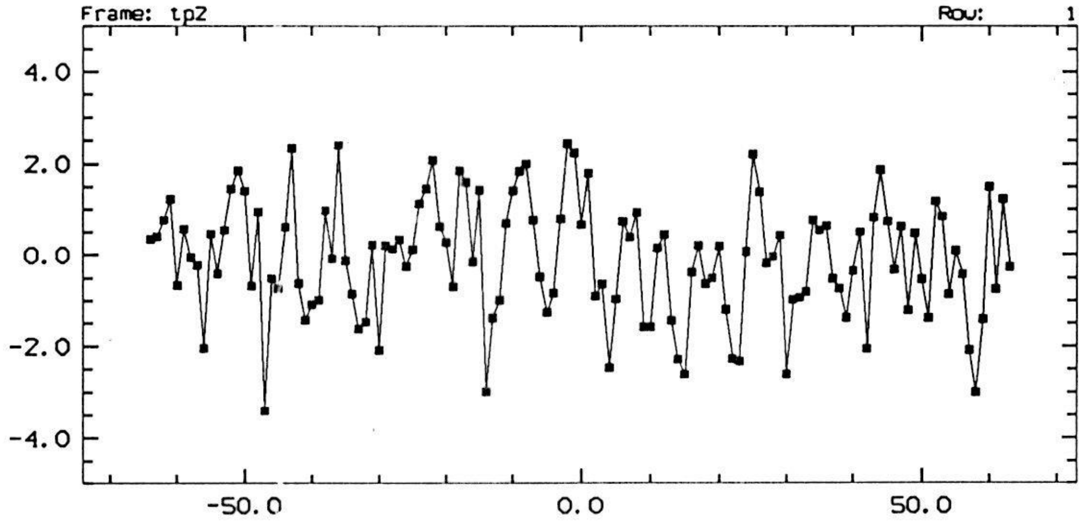
$g(x) = f(x) +$ bruit gaussien, $\sigma = 1$



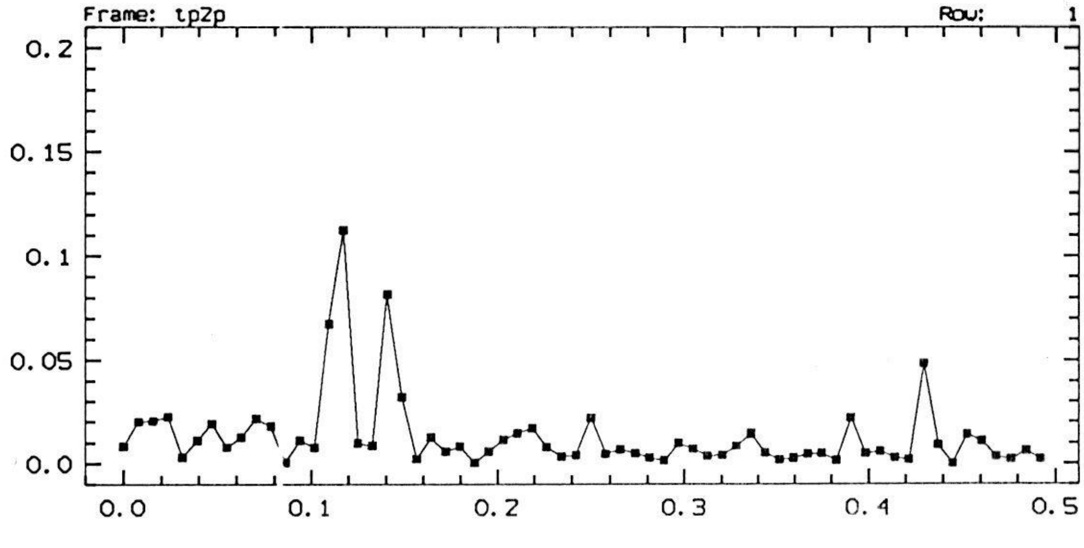
Densité spectrale



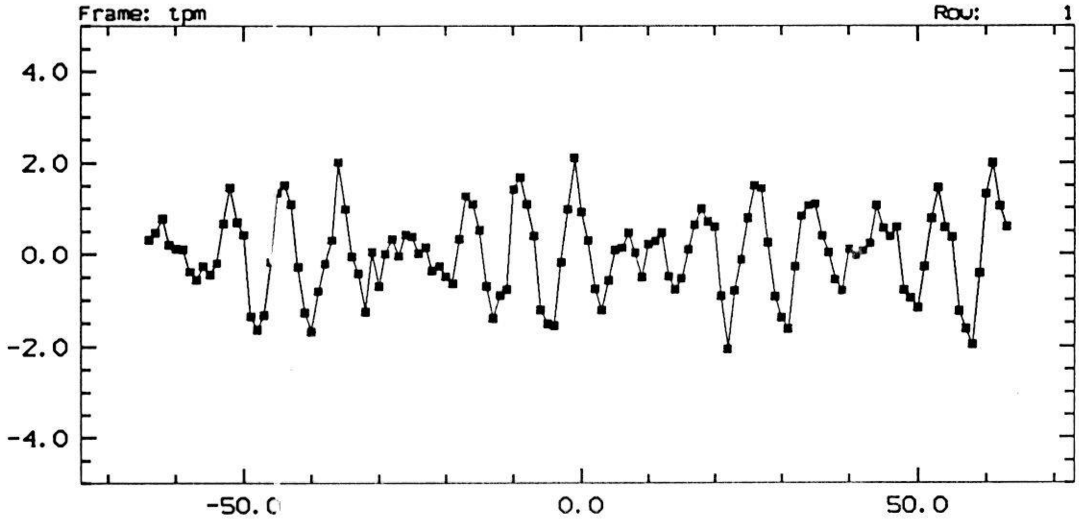
$g(x) = f(x) +$ bruit gaussien, $\sigma = 1$, dans une autre réalisation



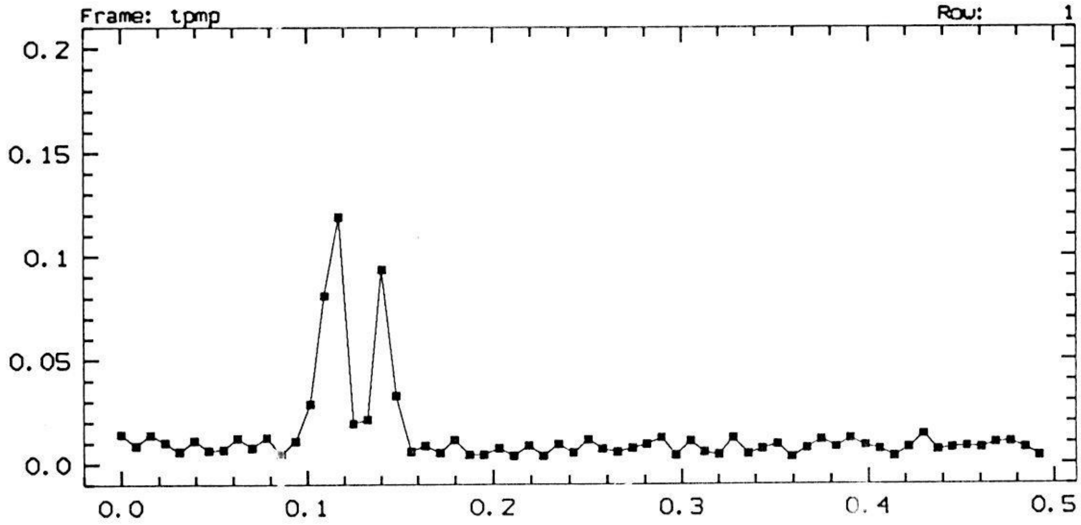
Densité spectrale



Moyenne de 10 réalisations de $g(x)$



Moyenne des 10 estimations de la densité spectrale



Etalement des fréquences
« *Leakage* »

Un signal sinusoïdal a une fréquence bien déterminée

Dans tous les cas pratiques, on considère une portion du signal, de durée finie (plus généralement, de support compact)

Cela revient à multiplier le signal de durée infinie par une fonction rectangle

Sa T.F. est donc *convoluée* par la T.F. du rectangle :

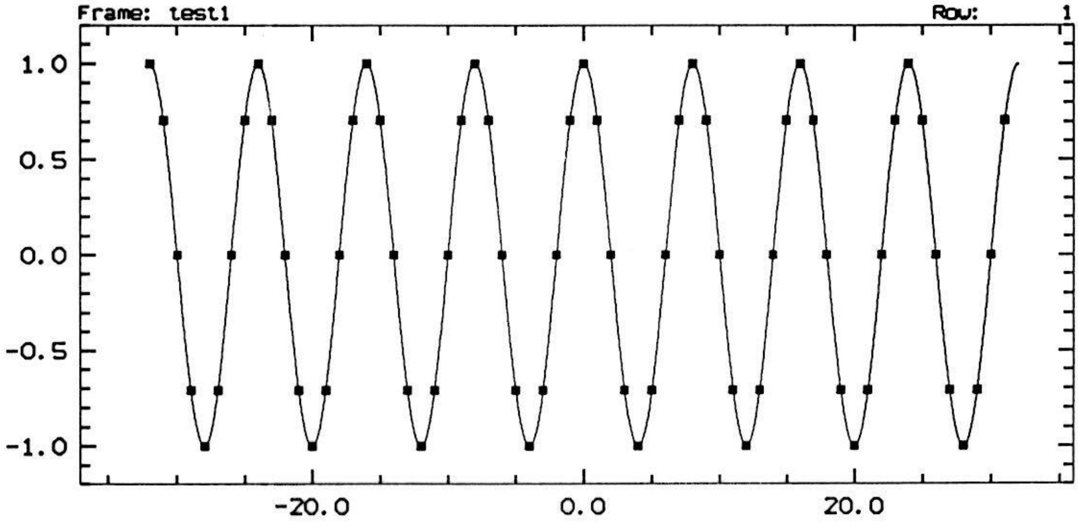
$$\simeq \frac{\sin x}{x}$$

La densité spectrale à la fréquence u est donc « étalée » sur les fréquences voisines

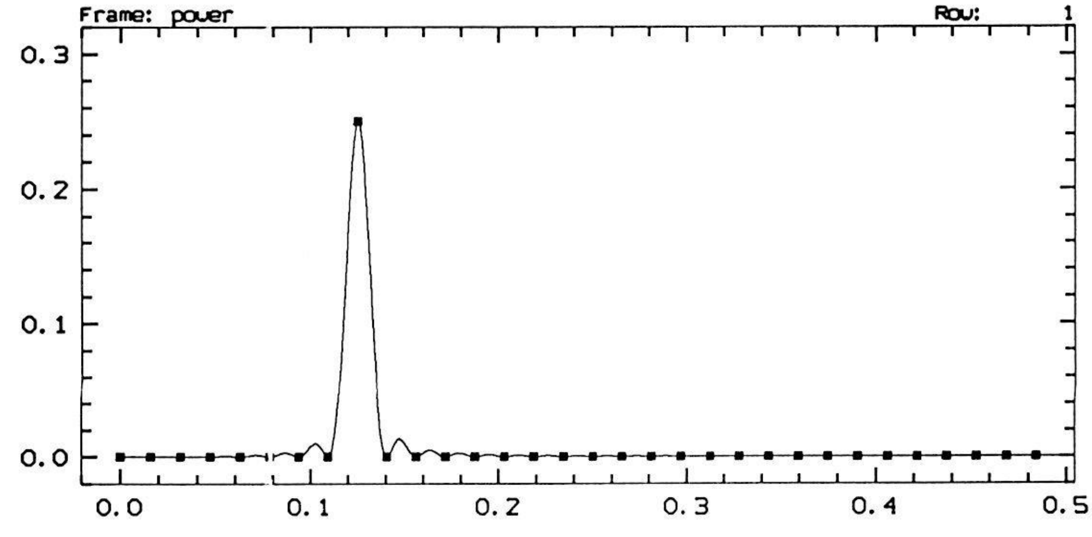
Exception : si on retient un nombre **entier** de périodes du signal, la T.F. passe par zéro à chacun des points d'échantillonnage

$\Rightarrow$ pas d'étalement des fréquences

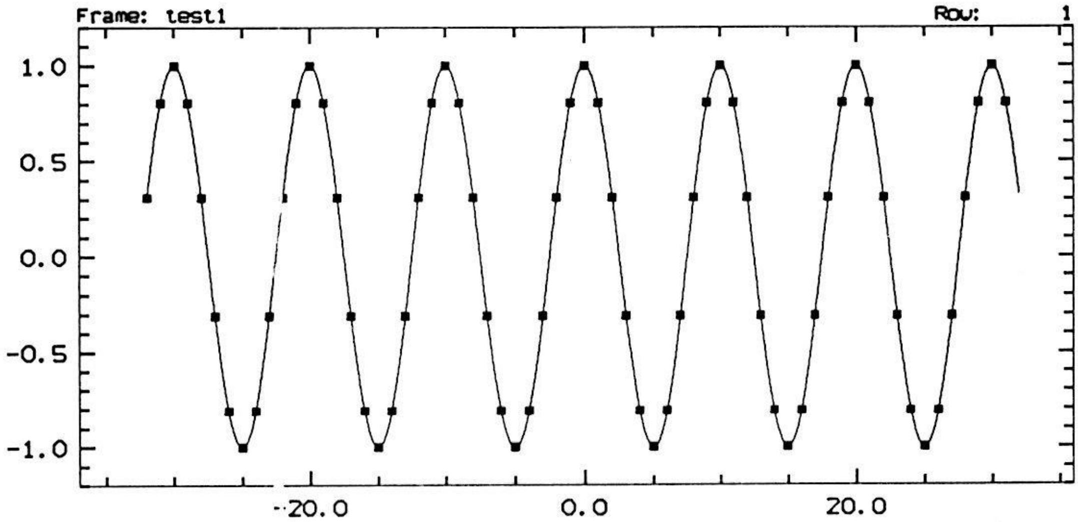
Exemple 1 : $f(x) =$ cosinusoïde avec nombre entier de périodes dans la portion retenue



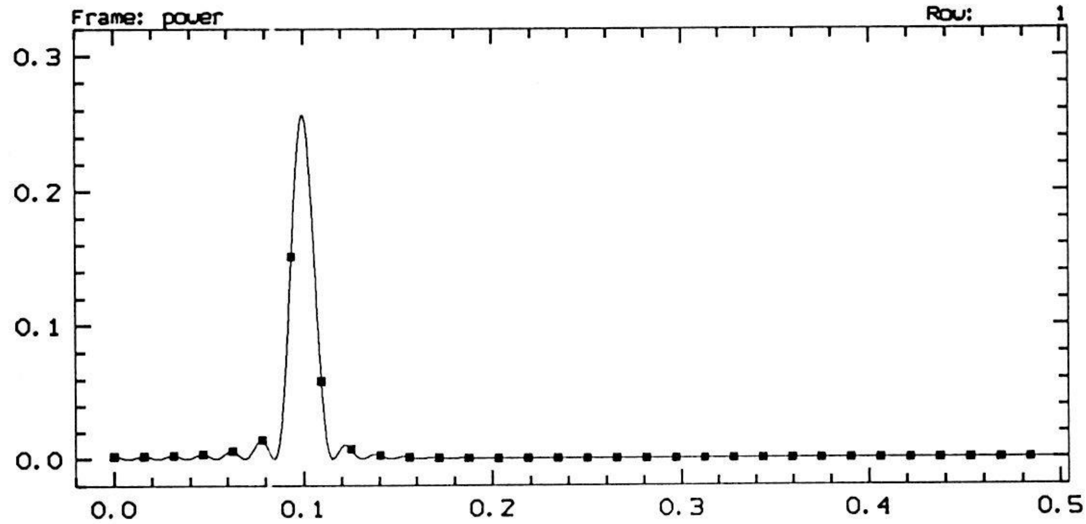
Densité spectrale



Exemple 2 : $f(x)$ = cosinusoïde avec nombre fractionnaire de périodes dans la portion retenue



Densité spectrale



Fenêtrage

Pour réduire l'étalement des fréquences, il faut multiplier le signal par une « fenêtre » moins abrupte que la fonction rectangle

Sa T.F. aura alors des lobes moins prononcés que la T.F. du rectangle

Inconvénient :

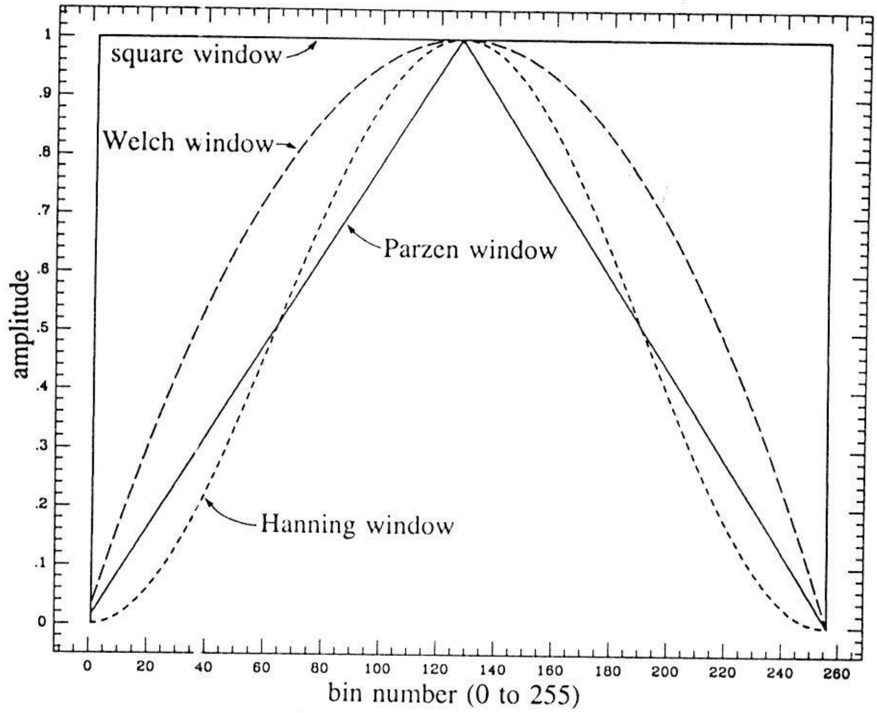
On réduit la « largeur » de la « fenêtre temporelle »

$\Rightarrow$ on augmente la largeur du pic central de sa T.F.

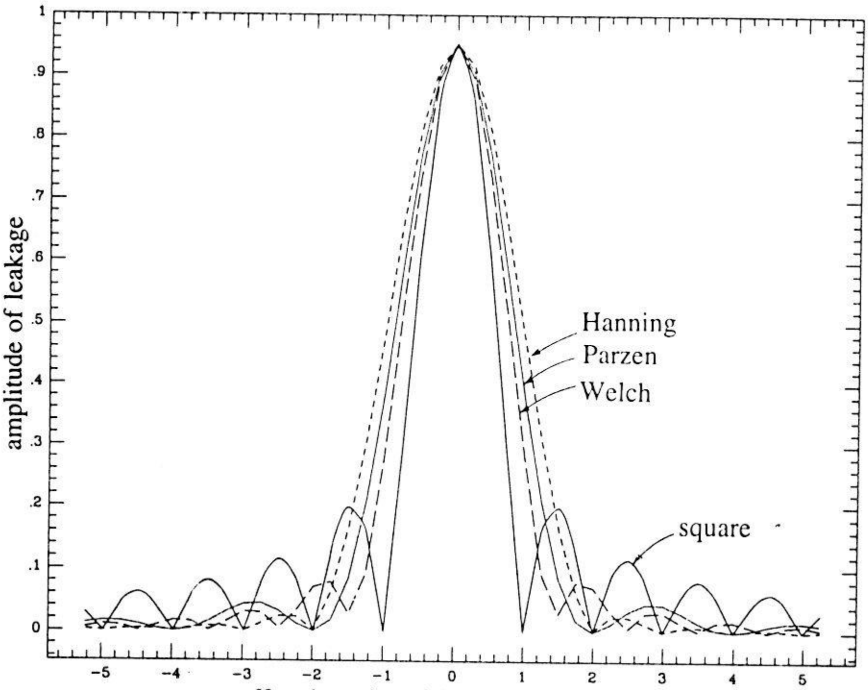
De nombreuses fonctions « fenêtres » ont été proposées.

Chacune a ses avantages et ses inconvénients

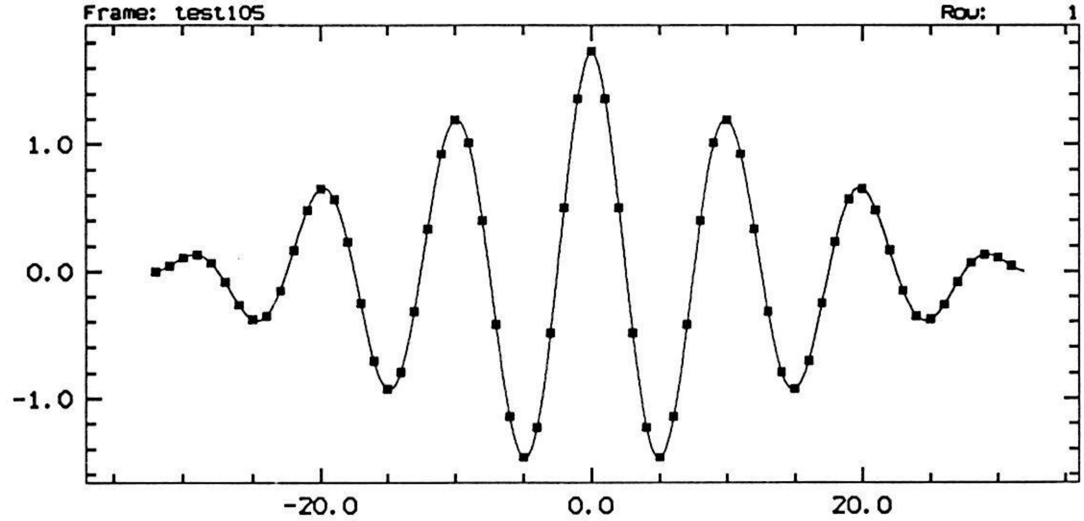
Quelques « fenêtres » couramment utilisées



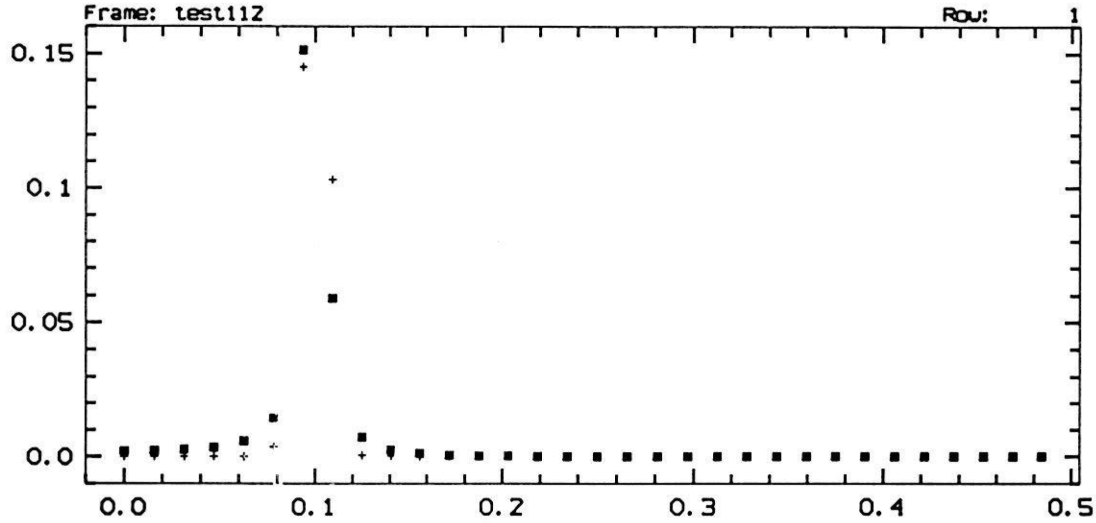
Les « fonctions d'étalement » correspondantes



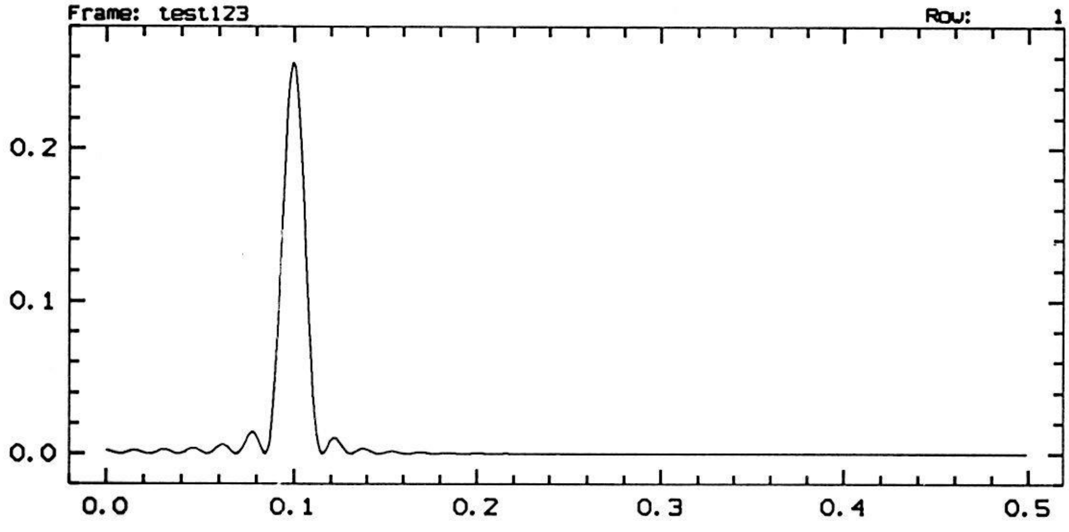
Exemple 3 : $f(x)$ = cosinusoïde de l'exemple 2, multipliée par une fenêtre triangulaire



Densité spectrale (+), comparée au résultat sans fenêtrage



Densité spectrale continue, sans fenêtrage



Densité spectrale continue, avec fenêtrage