# Chapitre 9

# Déconvolution.
# Méthodes de Fourier.

1. Position du problème

2. Méthodes de Fourier
   - Filtrage inverse
   - Filtre de Wiener

# Déconvolution
# Position du problème

*Rappel* :

mesure d'une grandeur physique

$\Rightarrow$ convolution par le profil instrumental

*But de la déconvolution* :

corriger la distorsion induite par l'instrument

Soient :

$f(x)$ la grandeur à mesurer

$s(x)$ le profil instrumental

$b(x)$ le résultat de la mesure «idéale» (en l'absence d'erreurs de mesure, ou de bruit)

$n(x)$ le bruit

$d(x)$ le résultat de la mesure

On a :

$$b(x) = s(x) * f(x)$$

$$d(x) = s(x) * f(x) + n(x)$$

*Déconvolution* :

étant donnés $d(x)$ et $s(x)$, estimer $f(x)$

# Méthodes de Fourier

1. Filtrage inverse

Soit $F(u)$ la transformée de Fourier de $f(x)$, etc...

***En l'absence de bruit*** (mesure « idéale ») :

$$B(u) = S(u)\, F(u)$$

$$\Rightarrow F(u) = \frac{B(u)}{S(u)}$$

si $S(u) \neq 0 \ \forall u$

*En présence de bruit* (mesure «réelle») :

$$D(u) = S(u)\,F(u) + N(u)$$

$$\Rightarrow F(u) = \frac{D(u) - N(u)}{S(u)}$$

mais $n(x)$ et $N(u)$ ne sont pas connus

$\Rightarrow$ on peut calculer une estimation $\hat{F}(u)$ de $F(u)$ :

$$\hat{F}(u) = \frac{D(u)}{S(u)}$$

(filtrage inverse)

Mais, en général, $S(u) \to 0$ pour $|u| > u_0$

$$\Rightarrow \frac{N(u)}{S(u)} \to \infty \quad \text{pour} \quad |u| > u_0$$

$\Rightarrow$ l'estimation $\hat{F}(u)$ diffère fortement de $F(u)$ aux fréquences élevées

*Interprétation* :

– la convolution par le profil instrumental est un filtrage passe-bas qui atténue ou annule les fréquences élevées

– des signaux ne différant que par les composantes de fréquence élevée seront impossibles à distinguer après ce filtrage

⇒ l'opération inverse ne peut pas « savoir » lequel de tous ces signaux ne différant que par des fréquences élevées est le « bon »

⇒ instabilité de la solution :

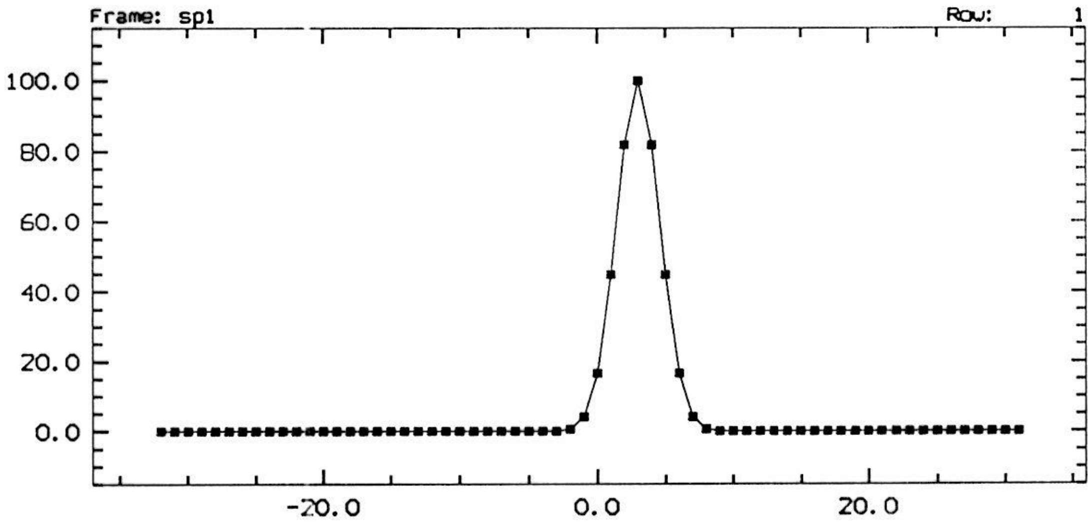
on a un **problème mal posé**

(comme dans la plupart des problèmes inverses)

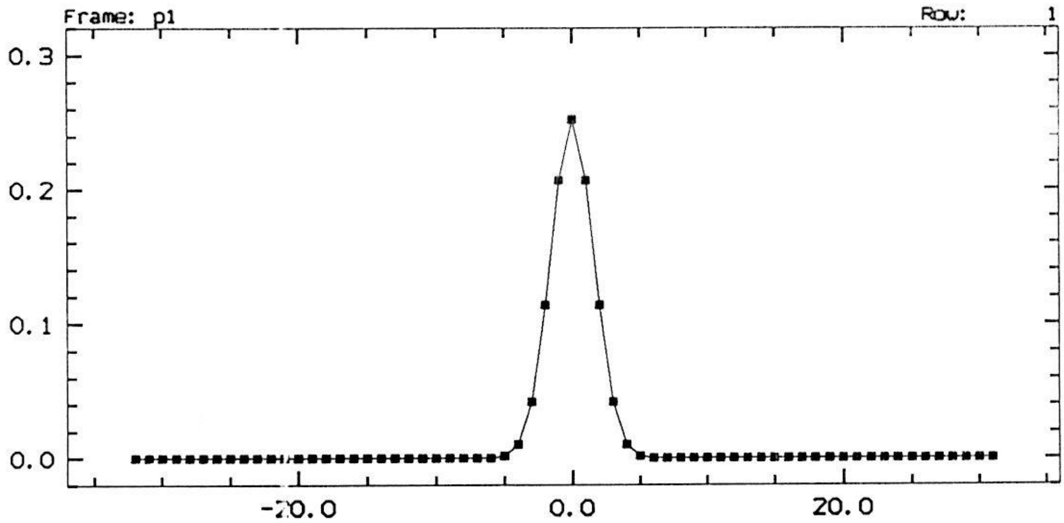
une petite erreur sur les données entraîne une grande erreur sur la solution

*Exemple 1* :

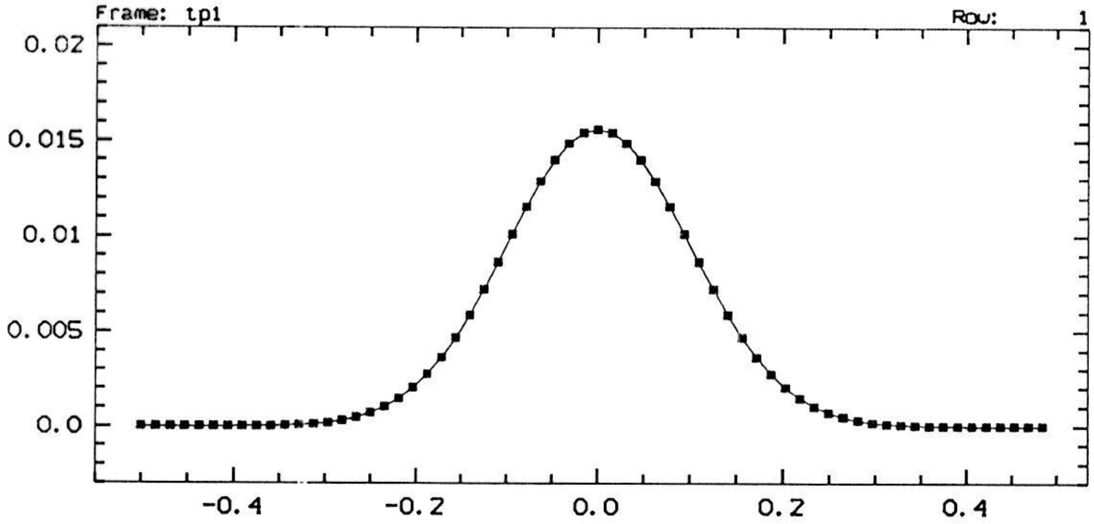
Impulsion centrée sur un point d'échantillonnage, sans bruit



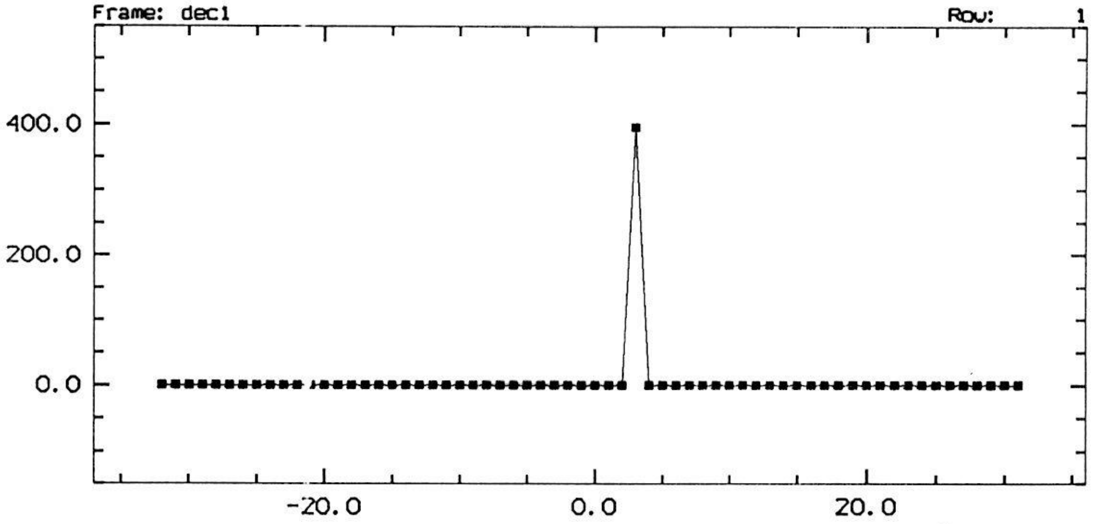

Profil instrumental gaussien



Densité spectrale

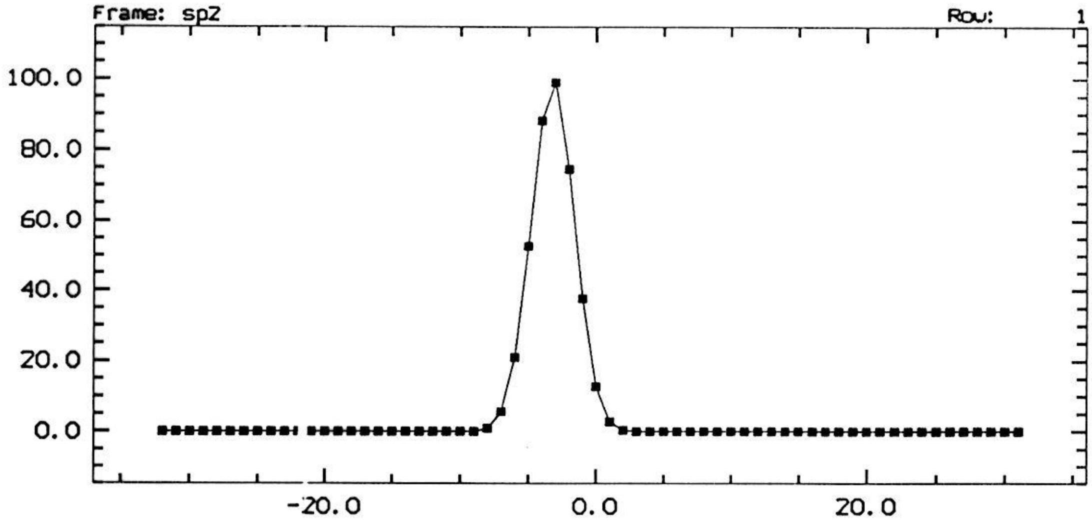



Déconvolution par filtrage inverse

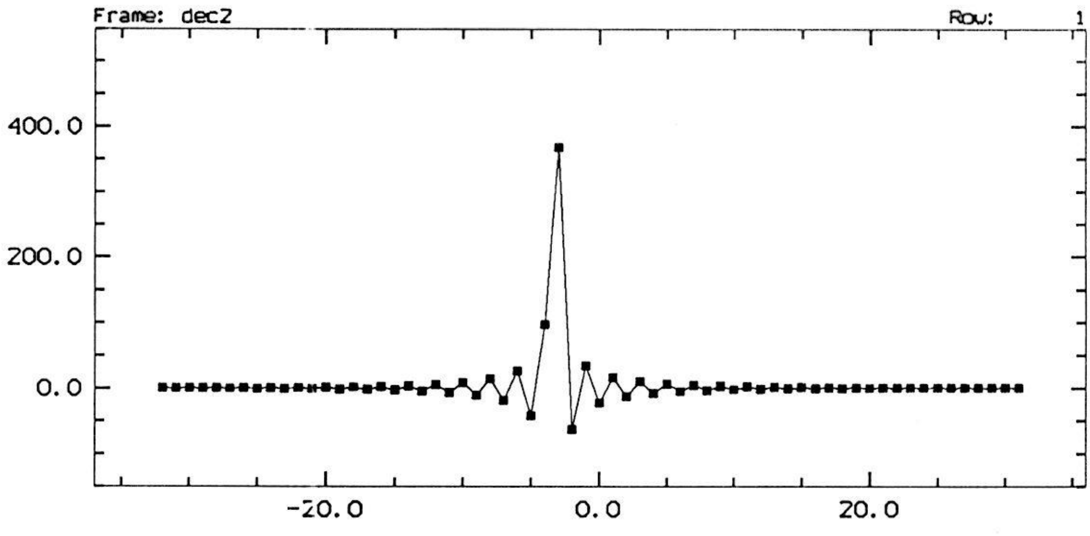


*Exemple 2* :

Impulsion centrée entre deux points d'échantillonnage, sans bruit

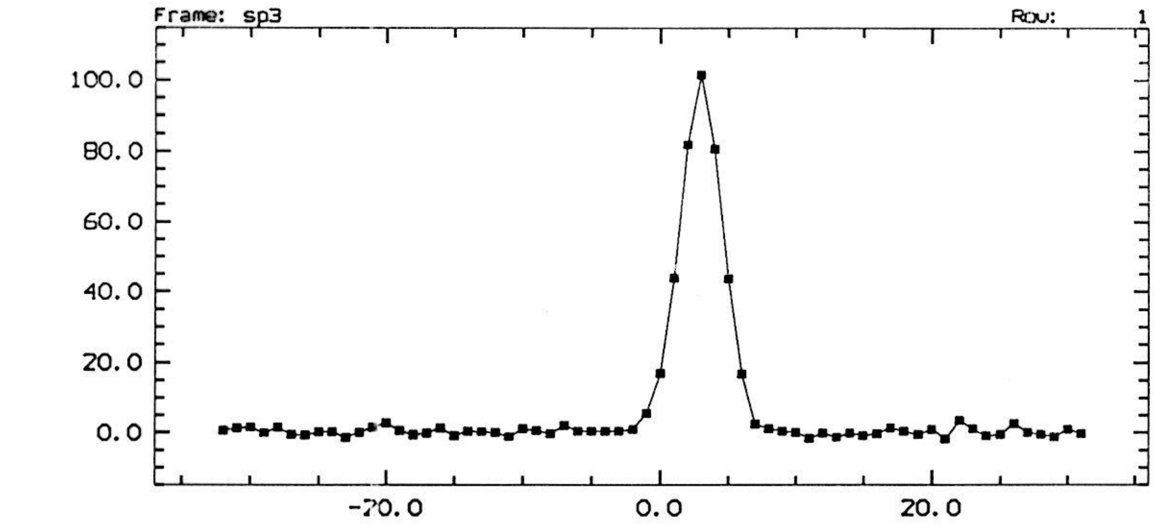



Déconvolution par filtrage inverse

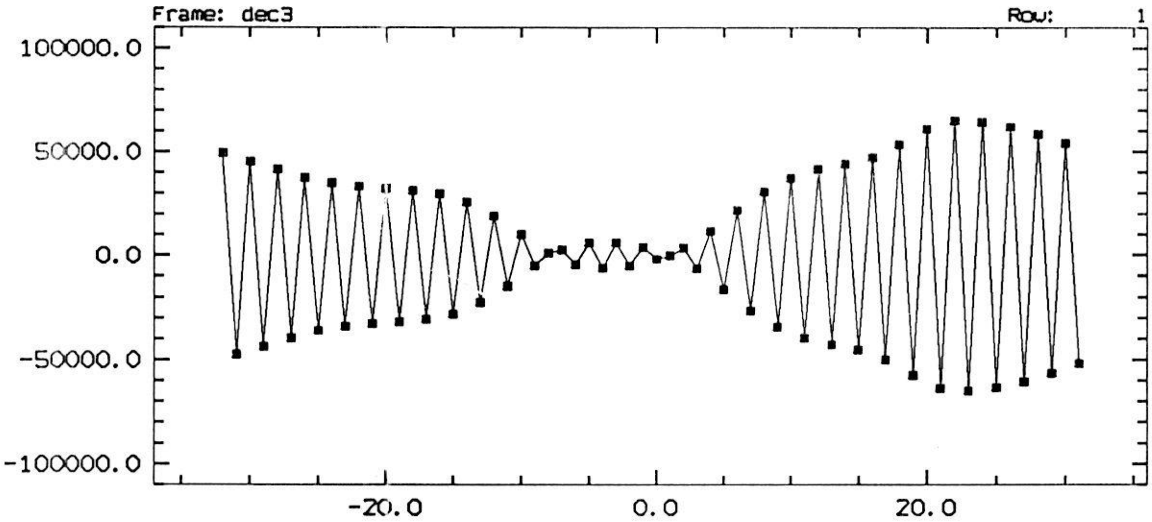


*Exemple 3* :

Idem (1), avec bruit gaussien ($\sigma = 1$)

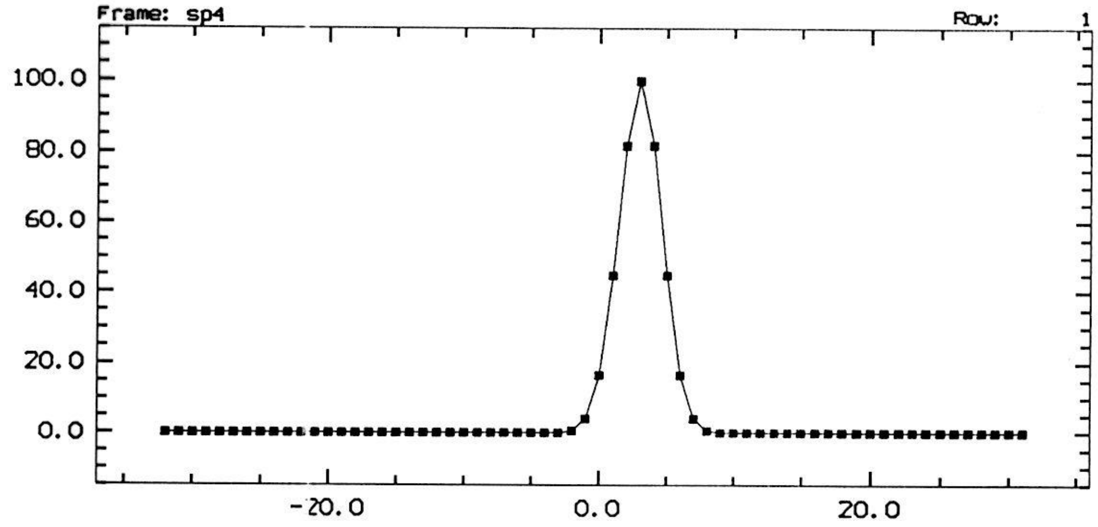



Déconvolution par filtrage inverse

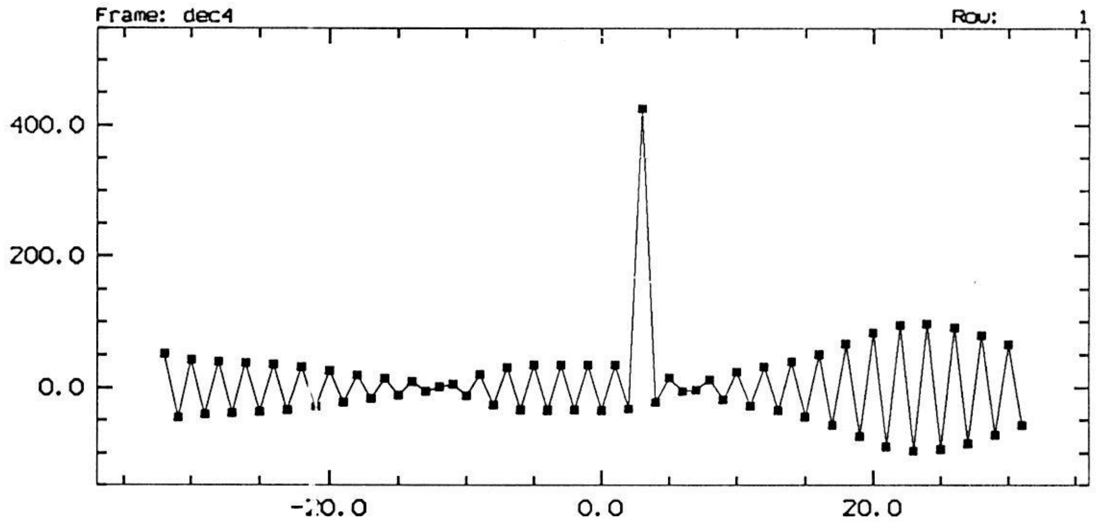


*Exemple 4* :

Idem (1), avec bruit gaussien ($\sigma = 0.001$)




Déconvolution par filtrage inverse



## 2. Filtre de Wiener

En général, le filtrage inverse amplifie fortement les hautes fréquences, qui sont celles où le bruit est dominant

On peut éviter ce problème par un ***filtrage*** qui annule ces hautes fréquences

Le ***filtre de Wiener*** réalise ce filtrage de manière optimale, au sens des moindres carrés

Le problème revient à déterminer la forme d'un filtre $\Phi(u)$ tel que

$$\hat{F}(u) = \frac{D(u)}{S(u)}\,\Phi(u)$$

soit aussi proche que possible de $F(u)$

Soit $e(x)$ l'erreur sur les données déconvoluées :

$$e(x) = \hat{f}(x) - f(x)$$

Au sens des moindres carrés, on veut minimiser

$$\varepsilon^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |e(x)|^2 \, dx$$

Par le théorème de Parseval, on a :

$$\varepsilon^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |E(u)|^2 \, du$$

où $E(u)$ est la T.F. de $e(x)$

Or,

$$E(u) = \hat{F}(u) - F(u)$$

$$E(u) = \frac{B(u) + N(u)}{S(u)} \, \Phi(u) \; - \; \frac{B(u)}{S(u)}$$

$$\varepsilon^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|S(u)|^2} \, |B(u)[1 - \Phi(u)] + N(u)\Phi(u)|^2 \, du$$

On suppose que le signal et le bruit ne sont pas corrélés :

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} B(u)\, N(u)\, H(u)\, du = 0$$

en moyenne, quelle que soit la fonction $H(u)$

$$\varepsilon^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|B(u)|^2\, |1 - \Phi(u)|^2 + |N(u)|^2\, |\Phi(u)|^2}{|S(u)|^2}\, du$$

L'erreur se compose de deux parties :

(1) une déconvolution incomplète à cause de la présence du filtre

(2) le bruit amplifié par la division par $S(u)$ mais réduit grâce au filtre

Minimiser l'intégrale d'une fonction positive revient à minimiser l'intégrand

$$\Rightarrow \boxed{\Phi(u) = \frac{|B(u)|^2}{|B(u)|^2 + |N(u)|^2}}$$

*Problème* :

On ne connaît pas la densité spectrale de l'image idéale ni celle du bruit

$\Rightarrow$ on ne connaît aucun des ingrédients qui entrent dans la recette du filtre de Wiener

Mais ce filtre est optimal : on peut donc espérer qu'une petite erreur sur le filtre entraîne très peu de changement sur le résultat de la déconvolution

$\Rightarrow$ *Réalisation pratique* :

– on calcule la densité spectrale des données à déconvoluer

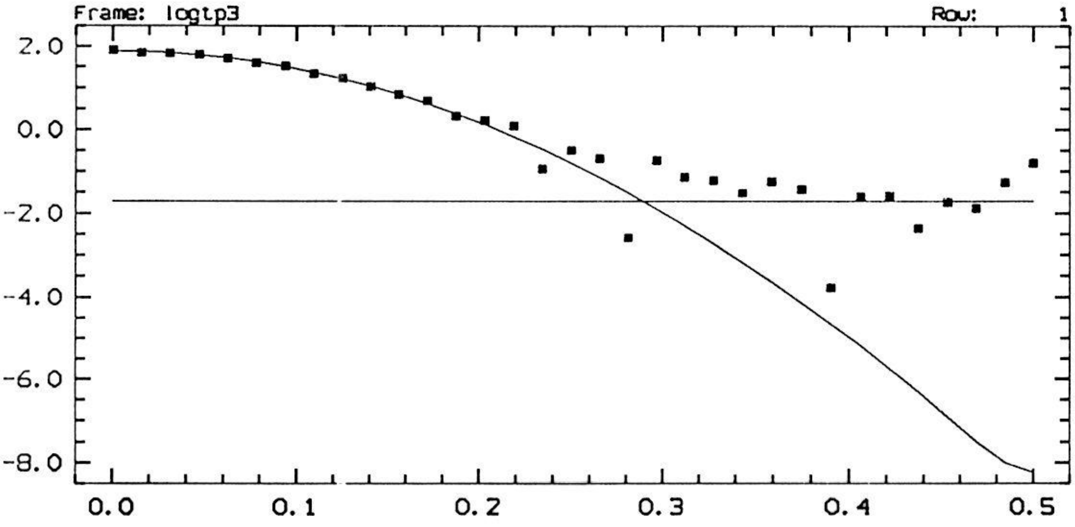
– on identifie la partie correspondant aux données utiles et celle due au bruit

– on ajuste des fonctions sur chacune de ces composantes

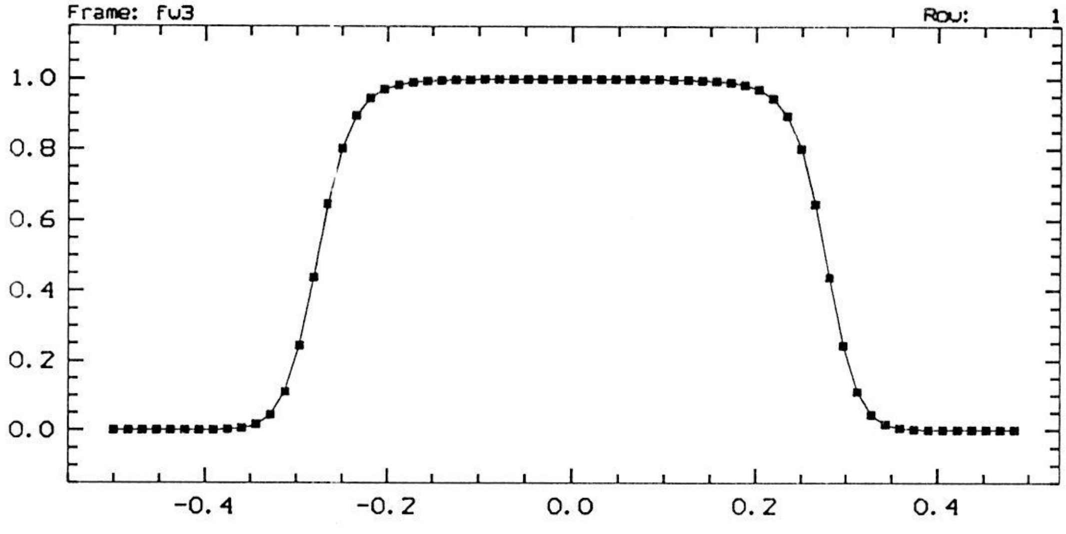
– on espère que ces fonctions représentent suffisamment bien $|B(u)|^2$ et $|N(u)|^2$

– en général, on se contente d'une constante pour représenter $|N(u)|^2$

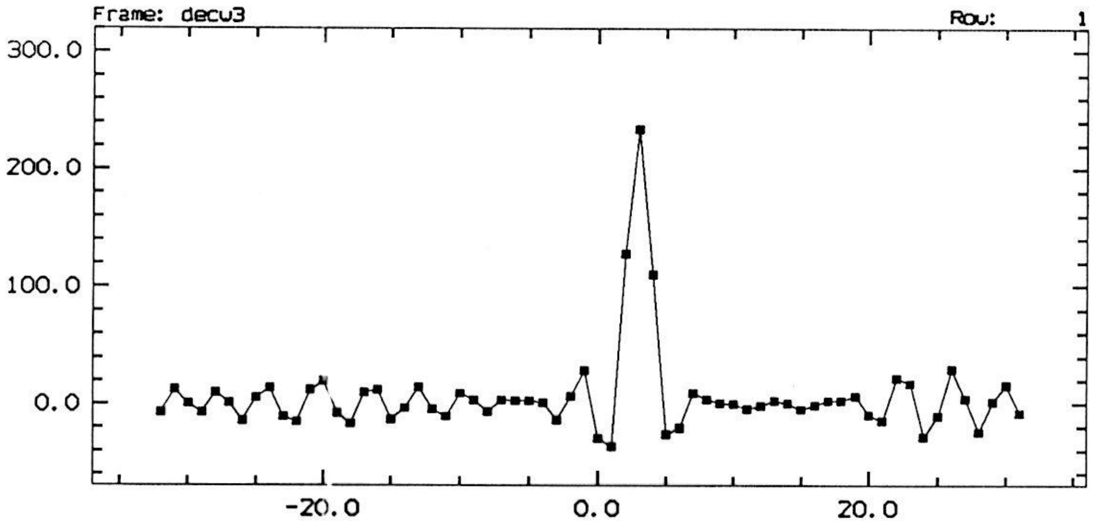
$\log P(u)$ pour l'exemple 3, avec fonctions ajustées



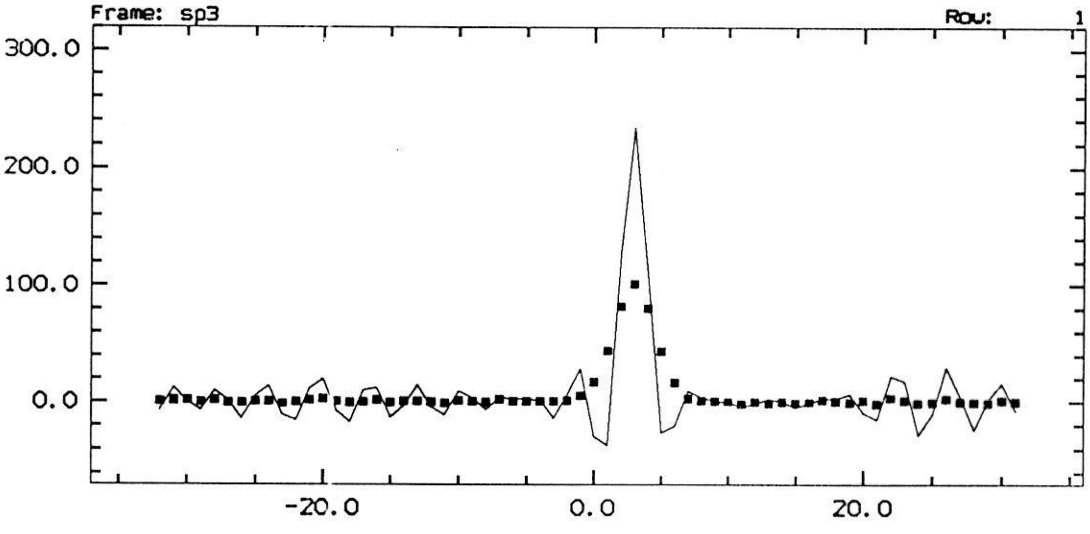

Filtre de Wiener



Déconvolution par filtre de Wiener

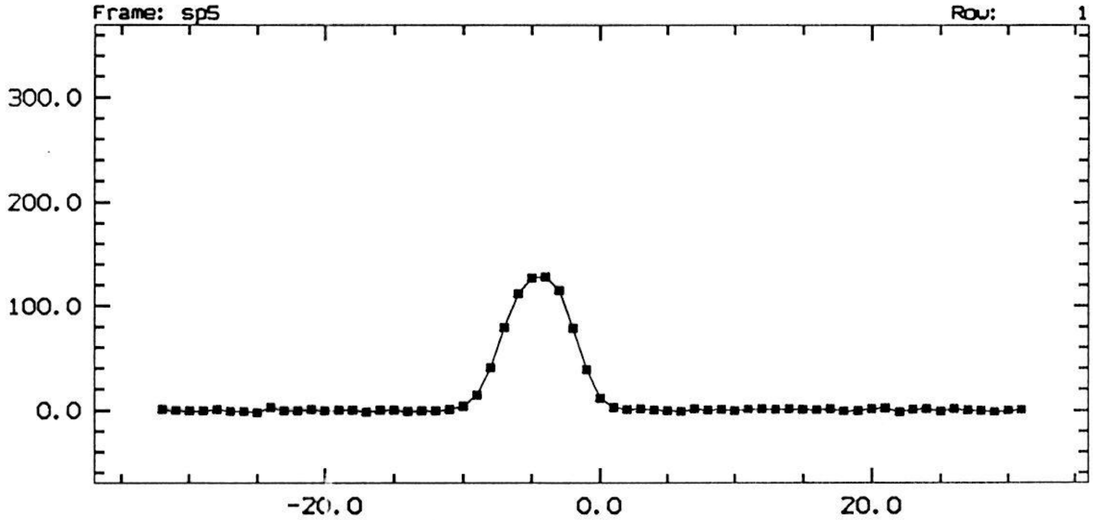



Données originales et déconvolution

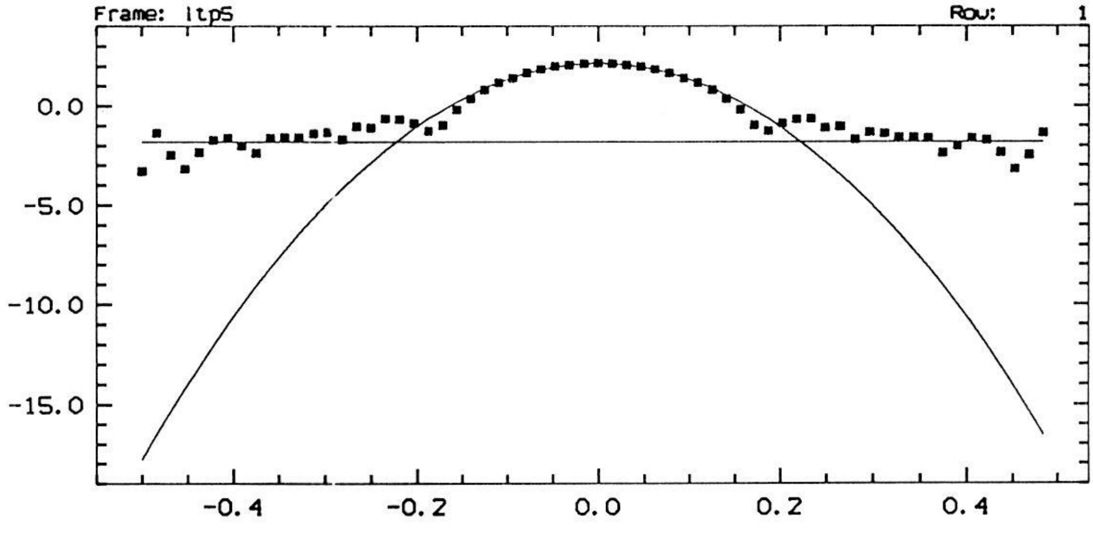


*Exemple 5* :

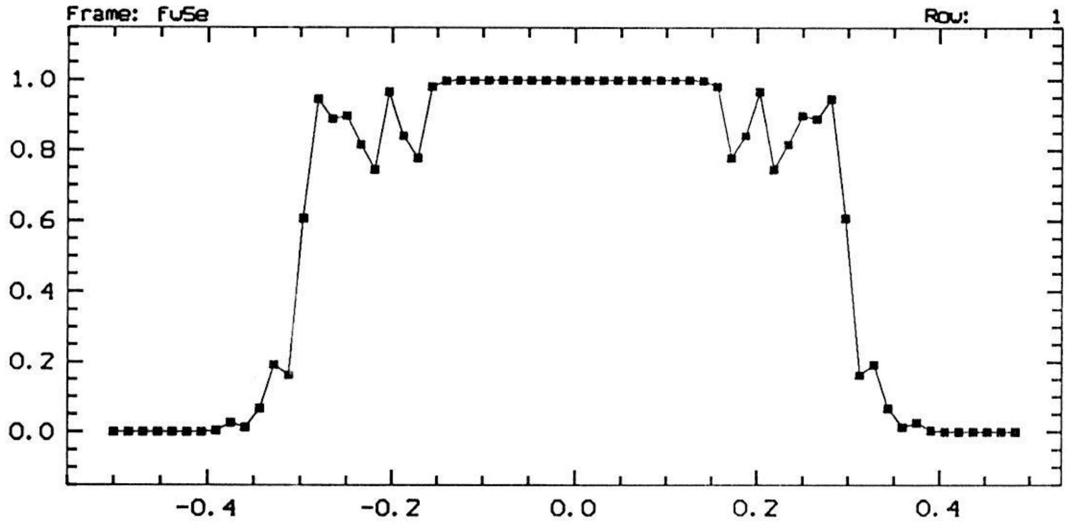
Deux gaussiennes non résolues



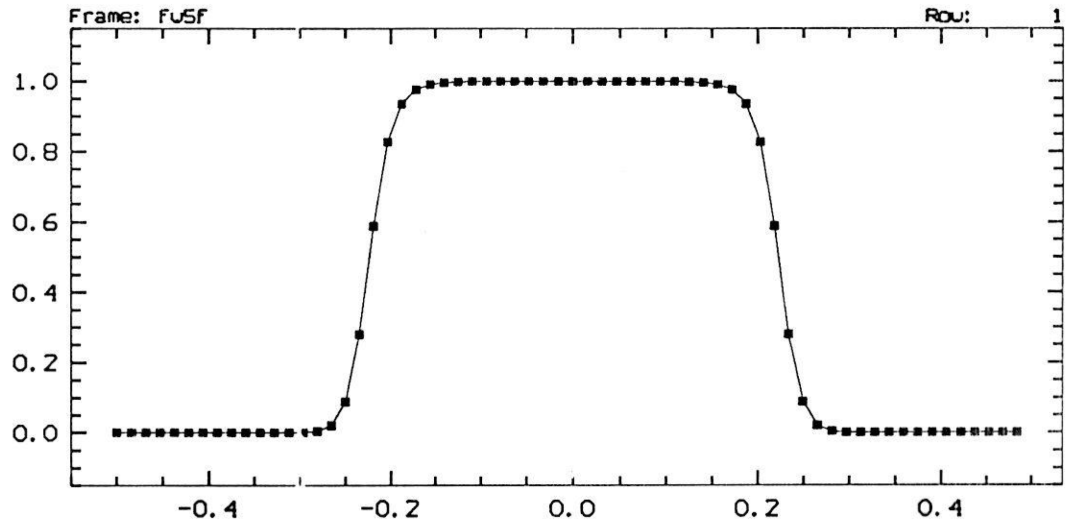

$\log P(u)$ et fonctions ajustées



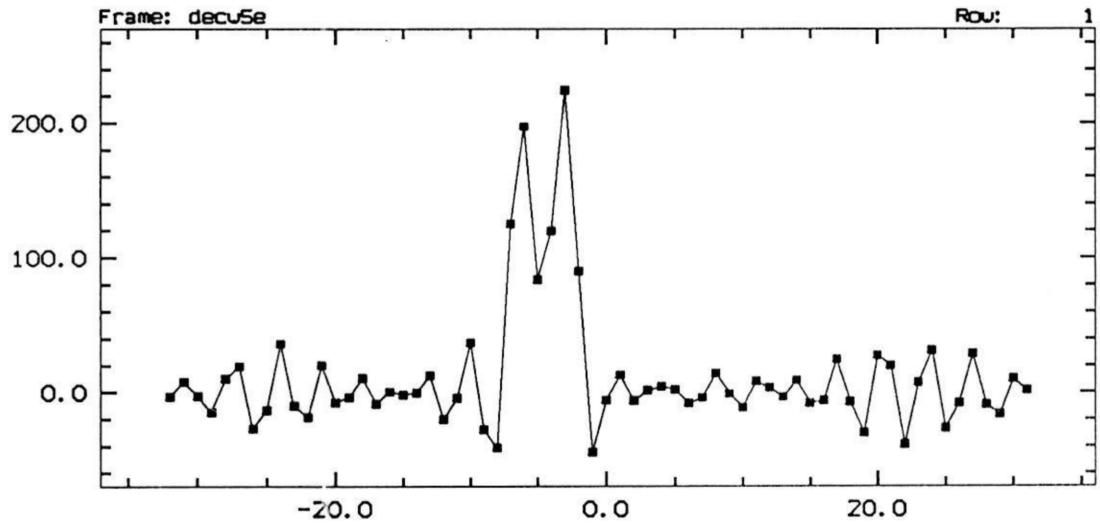
Filtre de Wiener exact




Filtre de Wiener ajusté



Déconvolution par filtre de Wiener exact




Déconvolution par filtre de Wiener ajusté