# Le problème à 2 corps en mécanique céleste

## 1 Les lois de Kepler

Les 3 lois de Kepler (1571-1630) décrivent la cinématique du mouvement des planètes autour du soleil avec une précision inégalée pour l'époque.

### 1.1 1ère loi (trajectoires elliptiques)

La première loi décrit la trajectoire des planètes autour du soleil :

*Les planètes, dont la terre, sont en mouvement le long d'orbites elliptiques dont le soleil occupe un des foyers.*

### 1.2 2ème loi (loi des aires)

La deuxième loi décrit comment varie la vitesse de ce déplacement au cours du temps :

*Le rayon vecteur soleil-planète balaie des aires égales en des temps égaux.*

### 1.3 3ème loi (loi harmonique)

La troisième loi établit une relation unique pour toutes les planètes entre leurs périodes de révolution et leurs distances au soleil :

*Pour toutes les planètes en orbite autour du soleil, le rapport entre le carré de leur période de révolution et le cube du demi-grand axe de leur orbite a la même valeur.*

## 2 Le problème à 2 corps en mécanique Newtonienne

Un peu moins d'un siècle après Kepler, Newton conclut de façon magistrale la révolution copernicienne en établissant les lois de la mécanique et de la gravitation universelle. Il montre que les 3 lois de Kepler sont une conséquence des principes qu'il a établi pour le cas d'un système à 2 corps.

Plaçons nous dans le référentiel inertiel dont l'origine est le centre de masse du système à 2 corps. Soient $\vec{r_1}$ et $\vec{r_2}$ les vecteurs positionnant les 2 corps dans ce référentiel, $m_1$ et $m_2$ leurs masses et $\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$. On a donc :

$$\frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{m_1 + m_2} = 0 \tag{1}$$

On introduit la masse réduite du système :

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{2}$$

et la masse totale $M = m_1 + m_2$. On voit qu'on a :

$$\begin{aligned} \vec{r_1} &= -\frac{\mu}{m_1}\,\vec{r} \\ \vec{r_2} &= \frac{\mu}{m_2}\,\vec{r} \end{aligned} \tag{3}$$

L'équation de mouvement s'écrit dès lors :

$$\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m_2\frac{d^2\vec{r_2}}{dt^2} = -m_1\frac{d^2\vec{r_1}}{dt^2} = -Gm_1m_2\frac{\vec{r}}{r^3} = -G\mu M\frac{\vec{r}}{r^3}\,. \tag{4}$$

## 2.1 La 1ère loi de Kepler sous la loupe de Newton

Newton a démontré que la solution de ce problème différentiel est une conique, un des foyer de celle-ci correspondant à l'origine du référentiel. Plus précisément, le foyer est le centre de masse du système quand on décrit le mouvement dans un référentiel inertiel. Si par contre, on souhaite décrire le mouvement relatif du corps 2 par rapport au corps 1, le foyer de la trajectoire relative est le corps 1.

**Dans un référentiel inertiel, les 2 corps orbitent donc autour de leur centre de masse.**

Il en est ainsi dans le cas particulier du système solaire : le soleil lui aussi est en orbite autour du centre de masse du système. Il en est également ainsi dans d'autres "systèmes solaires". Ce point est très important et est au coeur de la principale méthode de découverte de planètes autour d'autres étoiles que notre soleil.

Déterminons par exemple la position du centre de masse du système soleil-terre. Si l'indice 1 correspond au soleil et 2 à la terre, nous avons :

$$\frac{|\vec{r_1}|}{1\,\mathrm{UA}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \simeq \frac{m_{terre}}{m_{sol}} = \frac{5.9742 \times 10^{24} kg}{1.9891 \times 10^{30} kg} \approx 3 \times 10^{-6}.$$

C'est minuscule, ce centre de masse se situe à peine à $\approx 450$ km du centre du soleil (moins d'un millième de son rayon).

Si par contre, on considère le couple soleil-jupiter, on trouve :

$$|\vec{r_1}| \simeq \frac{m_{jupiter}}{m_{sol}} d_{sol-jup} = \frac{1.8987 \times 10^{27} kg}{1.9891 \times 10^{30} kg}\, 5.2\,\mathrm{UA} = \; 1.0676 \; R_{\odot}.$$

Le centre de masse du couple soleil-jupiter se trouve donc au niveau de la surface du soleil ; le soleil orbite autour de ce point en 11.86 ans (période de révolution de jupiter).

Enfin, un exemple important en astrophysique concerne le étoiles binaires. Il apparaît en effet que près de la moitié des étoiles vivent en couple plus ou moins rapproché : on parle de système binaire. Dans les systèmes binaires, les 2 étoiles ont en général des masses du même ordre de grandeur. Dans ce cas, le centre de masse est situé en un point intermédiaire entre les 2 étoiles et toutes 2 orbitent autour de ce point ; il arrive souvent que ces 2 mouvements soient détectables.

## 2.2 Energie totale

Il est utile de rappeler l'expression de l'énergie du système dans le cas particulier du problème à 2 corps. Notons $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ les vitesses dans le référentiel inertiel et $\vec{v} = \vec{v_2} - \vec{v_1}$ la vitesse relative, $r_1 = |\vec{r_1}|$, $v_1 = |\vec{v_1}|$, ...
L'énergie cinétique totale est tout simplement :

$$E_c = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{\mu v^2}{2}\,.$$

L'énergie potentielle totale est :

$$E_p = -\frac{G m_1 m_2}{r} = -\frac{G \mu M}{r},$$

ce qui donne pour l'énergie mécanique totale :

$$E = \frac{\mu v^2}{2} - \frac{GmM}{r}\,.$$

Cette énergie totale est une constante de mouvement extrêmement utile à déterminer. Tout d'abord, elle permet immédiatement de déterminer comment la vitesse relative diminue quand la distance entre les 2 corps augmente. En outre, son signe informe sur le type d'orbite.

- Si $E < 0$ : le système est lié, l'orbite est une **ellipse**.

- Si $E = 0$ : le système n'est pas lié et l'orbite est une **parabole** ; la vitesse relative tend vers 0 quand la distance tend vers l'infini.
- Si $E > 0$ : le système n'est pas lié et l'orbite est une **hyperbole** ; la vitesse relative tend vers une valeur strictement positive quand la distance tend vers l'infini.

Ceci nous conduit immédiatement à la notion de vitesse d'échappement. Le problème s'énonce ainsi : Soient 2 corps à une distance r, au-delà de quelle vitesse relative le système à 2 corps n'est-il plus lié ?

Le système n'est pas lié ssi $E \geq 0$, càd $1/2v^2 \geq GM/R$. La réponse est donc :

$$v \geq \sqrt{2GM/R} \equiv v_e. \tag{5}$$

$v_e = \sqrt{2GM/R}$ est appelée *vitesse d'échappement.*

On peut également considérer la *vitesse de lancement.* Plaçons nous à la surface d'un corps sphérique de rayon R et propulsons un objet dans la direction tangentielle à la sphère. A quelle vitesse doit-il être propulsé pour être mis en orbite ? La réponse est tout simplement : à une vitesse $v_l = \sqrt{GM/R}$. Pour un mouvement circulaire, l'accélération centripède est en effet donnée par :

$$\omega^2 R = \frac{v^2}{R} = \frac{GM}{R^2}. \tag{6}$$

On peut aller plus loin dans la discussion et poser la question : quelle sera la trajectoire pour une vitesse quelconque supérieure à la vitesse de lancement ? La réponse est : une conique dont l'excentricité est :

$$e = \frac{v^2 R}{GM} - 1\ .$$

Rappelons que $e = 0$ correspond à un cercle, $0 < e < 1$ à une ellipse, $e = 1$ à une parabole et $e > 1$ à une hyperbole.

## 2.3 La 2ème loi de Kepler sous la loupe de Newton

Dans un système à 2 corps, le moment cinétique total est tout simplement :

$$\vec{L} = m_1\, \vec{r_1} \times \vec{v_1} + m_2\, \vec{r_2} \times \vec{v_2} = \mu\, \vec{r} \times \vec{v}\,. \tag{7}$$

Comme l'énergie totale, le vecteur moment cinétique total est une constante de mouvement (direction normale au plan de l'orbite).

La loi des aires dans le problème à 2 corps est une conséquence immédiate de la loi de conservation du moment cinétique total. Démontrons qu'il en est bien ainsi.

L'aire $dA$ balayée pour un intervalle angulaire $d\theta$ petit est (en ne gardant que les termes du 1er ordre) :

$$dA \simeq (1/2)r^2 d\theta.$$

Divisons par l'intervalle de temps correspondant et passons à la limite. On trouve :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r v_\theta = \frac{1}{2}\frac{L}{\mu} = cst. \tag{8}$$

## 2.4 La 3ème loi de Kepler sous la loupe de Newton

Soit une orbite fermée (ellipse) de demi-grand axe $a$ et soit $P$ la période de révolution. Newton a démontré que :

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)}. \tag{9}$$

C'est quasiment la 3ème loi de Kepler et même bien plus. Dans le cas du système solaire, la masse du soleil domine. largement et on trouve bien que le rapport entre $P^2$ et $a^3$ est quasi constant. La loi de Newton va cependant plus loin car elle nous donne la valeur de cette constante : $4\pi^2/(GM_\odot)$ dans le cas des orbites autour du soleil.

**Cette loi offre un moyen remarquable de détermination des masses en astrophysique**.

Moyennant la connaissance de la période de révolution d'un astre et du demi-grand axe, elle nous permet de déterminer la masse totale du système. C'est elle qui nous permet de connaître :

- La masse du soleil, connaissant les distances et périodes de révolution des planètes autour du soleil.
- La masse des planètes en connaissant les distances et périodes de révolution des satellites autour de celles-ci.
- La masse des étoiles dans des systèmes binaires, connaissant leur mouvement orbital (voir plus loin dans le cours).
- La masse des galaxies au travers de la détermination des vitesses et des distances au centre, faisant apparaître le problème de la masse cachée ...

Il est utile de noter que, dans le cas de notre système solaire, la principale incertitude pour ce problème réside dans la connaissance de la constante de gravitation universelle G. Celle-ci est connue avec une précision relative de grosso-modo $10^{-4}$ à ce jour :

$$G = 6.673 \times 10^{-11}\ Nm^2 kg^{-2}.$$

$GM_\odot$, $GM_{terre}$, ... sont connus avec une très grande précision relative : de l'ordre de $10^{-8}$ ! et ceci par simple application de la loi harmonique. L'incertitude sur les masses est donc dominée par l'incertitude sur $G$ dans le système solaire ...

# 3 La précession (complément % au syllabus)

La terre n'est pas tout à fait sphérique. Elle ressemble plutôt à un ellipsoïde de révolution. Pourquoi ?

La rotation de la terre sur elle-même fait apparaître une force fictive dans le référentiel en rotation attaché à la terre : la force centrifuge. Dans le cas de la terre, l'accélération centrifuge aux pôles vaut :

$$\omega^2 R = 4\pi^2 R/P_{rot}^2 = 0.034\,\mathrm{m/s^2}$$

En comparaison, $GM_{terre}/R^2 \simeq 9.81\,\mathrm{m/s^2}$. L'effet de la force centrifuge produit dès lors un léger aplatissement, le rayon équatorial est légèrement supérieur au rayon polaire.

Nous avons vu que le plan de l'équateur est incliné de 23°27' par rapport au plan de l'écliptique. En conséquence, le soleil exerce un couple perturbateur sur la terre. Ce couple s'exerce dans une direction tendant à ramener le plan de l'équateur dans le plan de l'écliptique. Dans le syllabus, ce couple perturbateur est calculé moyennant certaines approximations.

Voyons ici comment l'action de ce couple perturbateur implique le phénomène de précession. Posons le problème comme suit : Un astre A est en rotation sur lui-même (Période $P_R$), moment d'inertie par rapport à son axe de rotation : $I = \alpha M_A R^2$ et $I_2 = \beta M_A R^2$ par rapport à un axe équatorial (pour rappel, $\alpha = 2/5$ pour une sphère). Cet astre est en orbite circulaire autour d'un astre B (période de révolution $P_o$, distance $d$). Le plan de l'équateur de l'astre A fait un angle $i$ avec le plan de l'orbite. Le corps B exerce un couple perturbateur moyen sur A dans la direction de la droite des noeuds :

$$\mathcal{M} = 3/2\ (\alpha - \beta)(GM_B/d^3)M_A R^2 \sin i \cos i\,. \tag{10}$$

Démontrons maintenant le phénomène de précession et calculons sa période.

Pour le choix des axes, nous prenons les 3 vecteur orthonormés suivants :
$\vec{e_z}$ : normal à l'écliptique
$\vec{e_\gamma}$ : direction du couple perturbateur (droite des noeuds).
$\vec{e_{\gamma,\perp}}$ : perpendiculaire aux 2 autres ($\vec{e_\gamma} \times \vec{e_{\gamma,\perp}} = \vec{e_z}$).

L'équation du problème est tout simplement :

$$I\,\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \mathcal{M}\vec{e_\gamma}, \tag{11}$$

où $\vec{\omega}$ est le vecteur vitesse angulaire de rotation. On écrit :

$$\vec{\omega} = \omega_0\vec{e_z} + \omega_\perp\vec{e_{\gamma,\perp}}. \tag{12}$$

Prenons la dérivée par rapport au temps ($d\vec{e_z}/dt = 0$) :

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega_0}{dt}\,\vec{e_z} + \frac{d\omega_\perp}{dt}\,\vec{e_{\gamma,\perp}} + \omega_\perp \frac{d\vec{e_{\gamma,\perp}}}{dt} = \frac{\mathcal{M}}{I}\vec{e_\gamma}. \tag{13}$$

Notons $\omega_p$ la fréquence angulaire de précession comptée positivement dans le sens rétrograde (sens dans lequel s'effectuera la précession), nous avons donc :

$$\frac{d\vec{e_{\gamma,\perp}}}{dt} = \omega_p\,\vec{e_\gamma}. \tag{14}$$

En identifiant les 2 membres de l'Eq. 13, on trouve immédiatement : $d\omega_0/dt = 0$ et $d\omega_\perp/dt = 0$. $\omega_0$ et $\omega_\perp$ sont donc constants : la vitesse de rotation de A n'est pas modifiée et $\vec{\omega}$ reste dans un cône d'ouverture i orienté selon $\vec{e_z}$.

Finalement, le dernier terme nous donne :

$$\omega_\perp\,\omega_p = \frac{\mathcal{M}}{I}. \tag{15}$$

La période de précession vaut donc :

$$P_p = \frac{2\pi I \omega_\perp}{\mathcal{M}}. \tag{16}$$

Nous avons $\omega_\perp = \omega \sin i$ ; utilisant les expressions données pour $I$ et $\mathcal{M}$, nous trouvons donc :

$$P_p = \frac{4\pi^2\alpha}{P_R}\,\frac{2}{3}\,\frac{d^3}{GM_B(\alpha-\beta)\cos\epsilon}. \tag{17}$$

D'autre part, la 3ème loi de Kepler nous donne pour la période de révolution $P_o$ :

$$P_o^2 = \frac{4\pi^2 d^3}{GM_B}. \tag{18}$$

On trouve donc finalement pour la période de précession :

$$P_p = \frac{P_o^2}{P_R}\,\frac{2}{3}\,\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\,\frac{1}{\cos\epsilon}, \tag{19}$$

ou encore :

$$\frac{P_p}{P_o} = \frac{2}{3}\,\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\,\frac{1}{\cos\epsilon}\,\frac{P_o}{P_R}. \tag{20}$$