Oscillations linéaires adiabatiques de sphères homogènes autogravitantes

R. SCUFLAIRE

1. Le modèle statique

On établit sans difficulté toutes les expressions ci-dessous. On notera γ la valeur de Γ_1, supposée constante dans toute la masse. Le modèle homogène incompressible s'obtient en passant à la limite $\gamma \to \infty$.

$$m = \frac{4\pi r^3 \rho}{3} \qquad M = \frac{4\pi R^3 \rho}{3}$$

$$g = \frac{Gm}{r^2} = \frac{4\pi G\rho r}{3} = \frac{GM}{R^3} r$$

$$P = \frac{2\pi G\rho^2}{3}(R^2 - r^2) = \frac{GM\rho}{2R^3}(R^2 - r^2) = \frac{3GM^2}{8\pi R^6}(R^2 - r^2)$$

$$A = \frac{d\ln\rho}{dr} - \frac{1}{\Gamma_1}\frac{d\ln P}{dr} = \frac{2r}{\gamma(R^2 - r^2)}$$

Avec les notations habituelles $x = \frac{r}{R}$ et $q = \frac{m}{M}$, on a, en variables sans dimension :

$$S_1 = x$$

$$S_2 = q/x^3 = 1$$

$$S_3 = \frac{RP}{GM\rho} = \frac{1}{2}(1 - x^2)$$

$$S_4 = \frac{4\pi R^3 \rho}{M} = 3$$

$$S_5 = \Gamma_1 = \gamma$$

$$S_6 = \frac{RA}{x} = \frac{2}{\gamma(1 - x^2)}$$

II. Les oscillations du modèle incompressible

Oscillations radiales

Avec les notations utilisées dans la note 744, on a

$$\begin{cases} x\partial Y = -3Y \\ x\partial Z = \dfrac{2x^2}{1-x^2}\left[Z + (\omega^2+4)Y \right] \end{cases}$$

en $x = 0$: $Y = 0$

$x = 1$: $(\omega^2+4)Y + Z = 0$

La première équation différentielle s'écrit

$$\partial(x^3 Y) = 0$$

la seule solution acceptable est $Y = 0$

La seconde équation devient alors

$$\frac{\partial Z}{Z} = \frac{2x}{1-x^2}$$

sa solution générale s'écrit $Z = \dfrac{c^{te}}{1-x^2}$, la seule acceptable est $Z = 0$

Le modèle homogène incompressible n'admet donc pas d'oscillation radiale.

Oscillations non radiales

On a les équations différentielles

$$\begin{cases} x\partial y = -(\ell+1)y + \dfrac{\ell(\ell+1)}{\omega^2}u + \dfrac{\ell(\ell+1)}{\omega^2}z \\ x\partial z = \omega^2 y - \ell z - v \\ x\partial u = v - \ell u \\ x\partial v = \ell(\ell+1)u - (\ell+1)v \end{cases}$$

et les conditions aux limites :

en $x=0$: $\begin{cases} \omega^2 y = l(u+z) \\ v = lu \end{cases}$

en $x=1$: $\begin{cases} y = z \\ v + (l+1)u + 3y = 0 \end{cases}$

Les deux dernières équations différentielles peuvent s'écrire

$$\partial(x^l u) = x^{l-1} v$$

$$\partial(x^{l+1} v) = l(l+1) x^l u$$

d'où

$$\partial\left[x^2\, \partial(x^l u)\right] = l(l+1)\,(x^l u)$$

Posons $\xi = \ln x$, on a $x\partial = \partial_\xi \qquad x^2\partial^2 = \partial_\xi^2 - \partial_\xi$

d'où

$$\left[\partial_\xi^2 + \partial_\xi - l(l+1)\right] x^l u = 0$$

il vient

$$x^l u = C_1 x^l + C_2 x^{-l-1}$$

la solution acceptable est $u = cte$. On obtient alors $v = cte$, donnée par $v = lu$

Les deux premières équations différentielles peuvent s'écrire

$$\partial(x^{l+1} y) = \frac{l(l+1)}{\omega^2}\, x^l (u+z)$$

$$\partial(x^l z) = x^{l-1}(\omega^2 y - v)$$

On en tire

$$\partial^2(x^{l+1} y) = l(l+1)\, x^{l-1} y$$

dont la solution générale est

$$x^{l+1} y = C_1 x^{l+1} + C_2 x^{-l}$$

la seule solution acceptable est $y = cte$. Il en résulte $z = cte$, donnée par $y = \frac{l}{\omega^2}(u+z)$ -

Les conditions au centre $(x=0)$ ont été satisfaites, exprimons les conditions en surface $(x=1)$

$$y = z$$

$$v + (l+1) + 3y = 0$$

Pour que les quatre équations admettent une solution non triviale, le dtm doit être nul

$$\det \begin{vmatrix} \omega^2 & -\ell & -\ell & 0 \\ 0 & 0 & -\ell & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & \ell+1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Soit

$$\omega^2 = \frac{2\ell-2}{2\ell+1}\,\ell$$

Cette solution doit être rejetée dans le cas où $\ell = 1$, car alors $\omega^2 = 0$ et le mouvement décrit est une translation. ~~solide~~.

On peut prendre comme solution

$$\begin{cases} y = 1 \\ z = 1 \\ u = -\dfrac{3}{2\ell+1} \\ v = -\dfrac{3\ell}{2\ell+1} \end{cases}$$

III. Les oscillations du modèle compressible

Oscillations radiales

On a les équations :

$$x\partial Y = -3Y - Z/\gamma$$
$$x\partial Z = \frac{2x^2}{1-x^2}\left\{(4+\omega^2)Y + Z\right\}$$

en $x=0$: $3Y + Z/\gamma = 0$
en $x=1$: $(4+\omega^2)Y + Z = 0$

On obtient aisément l'équation différentielle en Y :

$$(1-x^2)\partial^2 Y + \frac{4-6x^2}{x}\partial Y + \left(\frac{2\omega^2}{\gamma} - 6 + \frac{8}{\gamma}\right)Y = 0$$

Développons la solution régulière en $x=0$ en série de puissances de x^2

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k\, x^{2k}.$$

En substituant dans l'équation différentielle, il vient la relation de récurrence

$$Y_{k+1} = \frac{k(2k+5) - A}{(k+1)(2k+5)}\, Y_k$$

où on a posé

$$A = (\omega^2 + 4 - 3\gamma)/\gamma$$

Pour que Y soit régulier en $x=1$, la série doit avoir un nombre fini de termes (on le vérifie aisément). Exprimons que $Y_{n+1} = 0$, il vient :

$$A = n(2n+5)$$

d'où

$$\omega^2 = \gamma(2n^2+5n+3) - 4 \qquad (n=0,1,2,\dots)$$

Les coefficients Y_k ne dépendent pas de γ, ils sont donnés par la relation de récurrence

$$Y_{k+1} = -\frac{(n-k)(2n+2k+5)}{(k+1)(2k+5)}\, Y_k$$

On peut écrire explicitement Y_k en définissant le symbole (a,r,k), où k est un entier ≥ 0 ;

$$(a,r,k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k=0 \\ a(a+r)(a+2r)(a+3r)\cdots(a+kr-r) & \text{si } k>0 \end{cases}$$

~~En posant $Y_0 = 1$~~, on a

$$Y_k = (-1)^k C_n^k \frac{(2n+5,2,k)}{(5,2,k)}\, Y_0 = (-1)^k C_n^k \frac{(2k+5,2,n)}{(5,2,n)}\, Y_0$$

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de Y_k pour quelques valeurs de n et k (on a pris $Y_0 = 1$)

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	$-\frac{7}{5}$					
2	1	$-\frac{18}{5}$	$\frac{99}{35}$				
3	1	$-\frac{33}{5}$	$\frac{429}{35}$	$-\frac{143}{21}$			
4	1	$-\frac{52}{5}$	$\frac{234}{7}$	$-\frac{884}{21}$	$\frac{4199}{231}$		
5	1	-15	$\frac{510}{7}$	$-\frac{3230}{21}$	$\frac{1615}{11}$	$-\frac{7429}{143}$	
6	1	$-\frac{102}{5}$	$\frac{969}{7}$	$-\frac{1292}{3}$	$\frac{7429}{11}$	$-\frac{74290}{143}$	$\frac{22\,287}{143}$

Calculons maintenant $Y(1)$

$$Y(1) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \frac{(2n+5, 2, k)}{(5, 2, k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \frac{(2k+5, 2, n)}{(5, 2, n)}$$

$(2k+5, 2, n)$ est un polynôme de degré n en k. Le coefficient du terme de degré n est 2^n. En vertu d'un théorème établi en appendice, il vient

$$Y(1) = \frac{(-1)^n 2^n n!}{(5, 2, n)} = (-1)^n \frac{(2, 2, n)}{(5, 2, n)}$$

Oscillations non radiales

Les équations différentielles s'écrivent :

$$\begin{cases} x\partial y = -(l+1)y + \dfrac{l(l+1)}{\omega^2} z + \dfrac{l(l+1)}{\omega^2} u + \dfrac{2x^2(y-z)}{\gamma(1-x^2)} \\ x\partial z = \omega^2 y - lz - v + \dfrac{2x^2(y-z)}{\gamma(1-x^2)} \\ x\partial u = -lu + v \\ x\partial v = l(l+1)u - (l+1)v - \dfrac{6x^2(y-z)}{\gamma(1-x^2)} \end{cases}$$

Les conditions aux limites s'écrivent

en $x = 0$: $\omega^2 y = l(u+z)$

$v = lu$

en $x = 1$ $y = z$

$v + (l+1)u + 3y = 0$

Posons

$$w = \frac{2(y-z)}{\gamma(1-x^2)}$$

Notons que la régularité de w en $x = 1$ assure que la première condition en $x = 1$ soit satisfaite.
Dérivons l'égalité

$$\frac{\gamma}{2}(1-x^2)w = y - z$$

et multiplions par x, il vient :

$$\frac{\gamma}{2}x(1-x^2)\partial w - \gamma x^2 w = -(l+1+\omega^2)y + \frac{l(l+1+\omega^2)}{\omega^2}z + \frac{l(l+1)}{\omega^2}u + v \quad (*)$$

Dérivons et multiplions par x :

$$\frac{\gamma}{2}x^2(1-x^2)\partial^2 w + \frac{\gamma}{2}x(1-5x^2)\partial w - 2\gamma x^2 w =$$

$$= -(2l+1)\left[-(l+1+\omega^2)y + \frac{l(l+1+\omega^2)}{\omega^2}z + \frac{l(l+1)}{\omega^2}u + v\right] + \left(\frac{l(l+1)}{\omega^2} - \omega^2 - 4\right)x^2 w$$

En utilisant $(*)$, le 2nd membre de la dernière relation s'écrit :

$$-(2l+1)\left[\frac{\gamma}{2}x(1-x^2)\partial w - \gamma x^2 w\right] + \left[\frac{l(l+1)}{\omega^2} - \omega^2 - 4\right]x^2 w$$

Il vient ainsi :

$$(1-x^2)\partial^2 w + \frac{1}{x}\left[2l+2-(2l+6)x^2\right]\partial w + \left[\frac{2\omega^2}{\gamma} - \frac{2l(l+1)}{\gamma\omega^2} - 4l - 6 + \frac{8}{\gamma}\right]w = 0$$

Développons w en série de puissances de x :

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} w_k x^{2k}$$

et substituons dans l'équation différentielle ; il vient la relation de récurrence

$$w_{k+1} = \frac{k(2k+2l+5) - A}{(k+1)(2k+2l+3)} w_k$$

avec $A = \frac{\omega^2}{\gamma} - \frac{l(l+1)}{\gamma\omega^2} - 2l - 3 + \frac{4}{\gamma}$

Pour que w soit régulier en $x = 1$, la série doit avoir un nombre fini de termes. Exprimons que $w_{n+1} = 0$, il vient :

$$A = n(2n+2l+5)$$

On en tire l'équation en ω^2

$$\omega^2 - \frac{l(l+1)}{\omega^2} = \gamma(n+1)(2n+2l+3) - 4$$

Posons $D = \frac{\gamma}{2}(n+1)(2n+2l+3) - 2$

$$\omega^2 = \Omega \pm \sqrt{\Omega^2 + \ell(\ell+1)} \qquad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$= \begin{cases} \Omega + \sqrt{\Omega^2 + \ell(\ell+1)} & \text{modes } p \\ -\dfrac{\ell(\ell+1)}{\Omega + \sqrt{\Omega^2 + \ell(\ell+1)}} & \text{modes } g \end{cases}$$

La relation de récurrence entre les w_k prend la forme

$$w_{k+1} = -\frac{(n-k)(2k+2n+2\ell+5)}{(k+1)(2k+2\ell+3)}\, w_k$$

On a donc

$$w_k = (-1)^k C_n^k \frac{(2n+2\ell+5,\, 2,\, k)}{(2\ell+3,\, 2,\, k)}\, w_0$$

$$= (-1)^k C_n^k \frac{(2\ell+2k+3,\, 2,\, n+1)}{(2\ell+3,\, 2,\, n+1)}\, w_0$$

Les coefficients w_k sont indépendants de γ. Les tables qui suivent donnent les w_k pour quelques valeurs de ℓ et n, si on prend $w_0 = 1$

$$\ell = 1$$

n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	$-\frac{9}{5}$				
2	1	$-\frac{22}{5}$	$\frac{286}{70}$			
3	1	$-\frac{39}{5}$	$\frac{1170}{70}$	$-\frac{19\,890}{1890}$		
4	1	$-\frac{60}{5}$	$\frac{3060}{70}$	$-\frac{116\,280}{1890}$	$\frac{2\,441\,880}{83\,160}$	
5	1	$-\frac{85}{5}$	$\frac{6460}{70}$	$-\frac{406\,980}{1890}$	$\frac{18\,721\,080}{83\,160}$	$-\frac{468\,027\,000}{5\,405\,400}$

$l = 2$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	$-\frac{11}{7}$				
2	1	$-\frac{26}{7}$	$\frac{390}{126}$			
3	1	$-\frac{45}{7}$	$\frac{1530}{126}$	$-\frac{29070}{4158}$		
4	1	$-\frac{68}{7}$	$\frac{3876}{126}$	$-\frac{162\,792}{4158}$	$\frac{3\,744\,216}{216\,216}$	
5	1	$-\frac{95}{7}$	$\frac{7980}{126}$	$-\frac{550\,620}{4\,158}$	$\frac{27\,531\,000}{216\,216}$	$-\frac{743\,337\,000}{16\,216\,200}$

$l = 3$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	$-\frac{13}{9}$				
2	1	$-\frac{30}{9}$	$\frac{510}{198}$			
3	1	$-\frac{51}{9}$	$\frac{1\,938}{198}$	$-\frac{40\,698}{7\,722}$		
4	1	$-\frac{76}{9}$	$\frac{4\,788}{198}$	$-\frac{220\,248}{7\,722}$	$\frac{5\,506\,200}{463\,320}$	
5	1	$-\frac{105}{9}$	$\frac{9\,660}{198}$	$-\frac{724\,500}{7\,722}$	$\frac{39\,123\,000}{463\,320}$	$-\frac{1\,134\,567\,000}{39\,382\,200}$

$$\ell = 4$$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	$-\frac{15}{11}$				
2	1	$-\frac{34}{11}$	$\frac{646}{286}$			
3	1	$-\frac{57}{11}$	$\frac{2\,394}{286}$	$-\frac{55\,062}{12\,870}$		
4	1	$-\frac{84}{11}$	$\frac{5\,796}{286}$	$-\frac{289\,800}{12\,870}$	$\frac{7\,824\,600}{875\,160}$	
5	1	$-\frac{115}{11}$	$\frac{11\,500}{286}$	$-\frac{931\,500}{12\,870}$	$\frac{54\,027\,000}{875\,160}$	$-\frac{1\,674\,837\,000}{83\,140\,200}$

On notera que le système admet une solution constante non triviale avec $\omega = 0$, la même que dans le cas du modèle incompressible. C'est le mode f. Rappelons qu'on a, pour ce mode, pour $\ell \geq 2$

$$\omega^2 = \frac{2\ell - 2}{2\ell + 1}\,\ell$$

$$y = 1$$
$$z = 1$$
$$u = -\frac{3}{2\ell + 1}$$
$$v = -\frac{3\ell}{2\ell + 1}$$

Pour les modes p et g, développons en séries :

$$y = \sum_{k=0}^{n+1} y_k\, x^{2k} \quad , \quad z = \sum_{k=0}^{n+1} z_k\, x^{2k} \quad ,$$

$$u = \sum_{k=0}^{n+1} u_k x^{2k} \quad , \quad v = \sum_{k=0}^{n+1} v_k x^{2k}$$

Les équations différentielles donnent les relations

$$-(2k+l+1)\, y_k + \frac{l(l+1)}{\omega^2} z_k + \frac{l(l+1)}{\omega^2} u_k = - w_{k-1}$$

$$\omega^2 y_k - (2k+l)\, z_k - v_k = - w_{k-1}$$
$$-(2k+l)\, u_k + v_k = 0$$
$$l(l+1)\, u_k - (2k+l+1)\, v_k = 3 w_{k-1}$$

On tire, pour $k \geq 1$:

$$y_k = \frac{(2k+l)\,\omega^2 + l(l+1)}{2k(2k+2l+1)\,\omega^2} w_{k-1} = \frac{\omega^2 + 2k + l + 4 - \gamma(n+1)(2n+2l+3)}{2k(2k+2l+1)} w_{k-1}$$

$$z_k = \frac{\omega^2 + 2k + l + 4}{2k(2k+2l+1)} w_{k-1}$$

$$u_k = -\frac{3}{2k(2k+2l+1)} w_{k-1}$$

$$v_k = -\frac{3(2k+l)}{2k(2k+2l+1)} w_{k-1}$$

Suivant les conditions aux limites

$$\omega^2 y_0 = l\,(z_0 + u_0)$$
$$v_0 = l u_0$$
$$\sum_{k=0}^{n+1} (y_k - z_k) = 0$$
$$\sum_{k=0}^{n+1} \left[v_k + (l+1)\, u_k + 3 y_k \right] = 0$$

Les deux dernières conditions peuvent s'écrire

$$y_0 - z_0 = \frac{\gamma}{2}(n+1)(2n+2l+3) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{w_{k-1}}{k(2k+2l+1)}$$

$$v_0 + (l+1)u_0 + 3y_0 = \frac{3}{2}\left[l+1 - \frac{l(l+1)}{\omega^2} \right] \sum_{k=1}^{n+1} \frac{w_{k-1}}{k(2k+2l+1)}$$

Notons que pour $k \geq 1$

$$w_k - w_{k-1} = -\frac{(n+1)(2n+2l+3)}{k(2k+2l+1)} w_{k-1}$$

En sommant pour $k = 1$ jusqu'en $n+1$, il vient

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{w_{k-1}}{k(2k+2l+1)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{w_k}{(k+1)(2k+2l+3)} = \frac{w_0}{(n+1)(2n+2l+3)}$$

Les deux dernières conditions s'écrivent donc

$$y_0 - z_0 = \frac{1}{2} w_0$$

$$v_0 + (l+1)u_0 + 3y_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{l+1 - \frac{l(l+1)}{\omega^2}}{(n+1)(2n+2l+3)} w_0$$

On peut alors résoudre les 4 conditions limites par rapport à y_0, z_0, u_0 et v_0, on obtient

$$y_0 = \frac{-\left[(2l+1)\omega^2 + 5l + 1 - 2(l-1)\frac{l(l+1)}{\omega^2}\right] l\, w_0}{2(n+1)(2n+2l+3)\left[(2l+1)\omega^2 - 2l(l-1)\right]}$$

Calculons à présent $y(1)$

$$y(1) = \sum_{k=0}^{n+1} y_k = y_0 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(2k+l)\omega^2 + l(l+1)}{2k(2k+2l+1)\omega^2}$$

$$= y_0 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{w_{k-1}}{2k+2l+1} + \frac{1}{2}\left[l + \frac{l(l+1)}{\omega^2}\right] \sum_{k=1}^{n+1} \frac{w_{k-1}}{k(2k+2l+1)}$$

On évalue $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{w_{k-1}}{2k+2l+1}$ de la façon suivante :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{w_{k-1}}{2k+2l+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{w_k}{2k+2l+3}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \frac{(2k+2l+5, 2, n)}{(2l+3, 2, n+1)} w_0$$

$(2k+2l+5, 2, n)$ est un polynôme en k, de degré n. Le coefficient de k^n est 2^n. En vertu de la formule démontrée en appendice, l'expression à évaluer s'écrit donc

$$\frac{(-1)^n 2^n n!\, w_0}{(2l+3, 2, n+1)}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{w_{k-1}}{k(2k+2l+1)}$$ a déjà été évalué précédemment, sa valeur est

$$= \frac{w_0}{(n+1)(2n+2l+3)}$$

Il vient donc après quelques calculs

$$y(1) = \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2l+3, 2, n+1)} w_0 = \frac{(-1)^n (2, 2, n)}{(2l+3, 2, n+1)} w_0$$

Références

P. Ledoux, T. Walraven, 1958, Hdb der Physik, 51, 353-604 (ed. S. Flugge). Variable stars

C.L. Pekeris, 1938, Astrophys. J., 88, 189-199. Nonradial oscillations of stars

E. Sauvenier-Goffin, 1951, Bull. Soc. Roy. des Sci. de Liège, 20, 20-38. Note sur les pulsations non-radiales d'une sphère homogène compressible

T.E. Sterne, 1937, MNRAS, 97, 582-593. Modes of radial oscillation.

S. Prasad, 1949, MNRAS, 109, 103-107. Radial oscillations of a stellar model

Appendice

Pour n et l entiers ≥ 0, définissons

$$S_n^0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$$

$$S_n^l = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k k^l \qquad (l > 0)$$

Nous nous proposons de calculer S_n^l pour $l \leq n$.
Considérons l'égalité $(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^k$ et dérivons-la l fois par rapport à x

$$(-1)^l (n,-1,l)(1-x)^{n-l} = \sum_{k=l}^{n} (-1)^k C_n^k (k,-1,l)\, x^{k-l}$$

Pour $x = 1$, il vient

$$\sum_{k=l}^{n} (-1)^k C_n^k (k,-1,l) = (-1)^n n!\, \delta_{nl}$$

en observant que $(k,-1,l) = 0$ pour $l > k$, on peut encore écrire

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (k,-1,l) = (-1)^n n!\, \delta_{nl}$$

or $(k,-1,l) = \sum_{j=0}^{l} \alpha_{lj} k^j$ avec $\alpha_{ll} = 1$
Il vient donc

$$\sum_{j=0}^{l} \alpha_{lj} S_n^j = (-1)^n n!\, \delta_{ln}$$

On a donc $S_n^0 = 0$

$$S_n^l = -\sum_{j=0}^{l-1} \alpha_{lj} S_n^j \quad \text{pour } l = 1, \dots, n-1$$

Par récurrence on obtient donc $S_n^l = 0$ pour $l = 0, 1, \dots, n-1$
Pour $l = n$, on a

$$S_n^n = (-1)^n n!$$

Pour $l = n+1$, on calcule aisément $\alpha_{n+1,n} = -\frac{n(n+1)}{2}$, d'où on tire $S_n^{n+1} = (-1)^n \frac{n}{2} (n+1)!$