Oscillations linéaires adiabatiques de sphères autogravitantes

R. SCUFLAIRE 1983

Configuration statique

Equilibre hydrostatique

$$D_i P = -\rho D_i \phi$$

$$\partial_r P = -\rho \partial_r \phi$$

Equation de Poisson

$$\Delta \phi = 4\pi G \rho$$

$$\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \phi) = 4\pi G \rho$$

cette équation s'intègre une fois

$$\partial_r \phi = g$$

avec $g = \frac{Gm}{r^2}$ où m est la masse intérieure à la sphère de rayon r

$$m = \int 4\pi r^2 \rho \, dr$$

La configuration hydrostatique satisfait donc aux équations

$$\begin{cases} \partial_r P = -\frac{Gm}{r^2} \rho \\ \\ \partial_r m = 4\pi r^2 \rho \end{cases}$$

Posons $x = r/R$

$q = m/M$

Il vient

$$\begin{cases} \partial_x \frac{4\pi R^4 P}{GM^2} = -\frac{4\pi R^3 \rho}{M} \cdot x \cdot \frac{q}{x^3} \\ \\ \partial_x q = \frac{4\pi R^3 \rho}{M} x^2 \end{cases}$$

On notera qu'en $x = 0$ on a $\frac{4\pi R^3 \rho}{M} = 3 \frac{q}{x^3}$

Équations aux perturbations

Nous désignerons par f' la perturbation eulérienne de la grandeur f et par δf sa perturbation lagrangienne. Entre ces deux types de perturbations on a la relation

$$\delta f = f' + \delta x^j D_j f$$

Nous recherchons des perturbations linéaires qui dépendent du temps par le facteur e^{st}. On écrira $s = i\sigma$

Eq. de continuité :

$$\partial_t \rho + D_j(\rho v^j) = 0$$

$$\rho' + D_j(\rho\, \delta x^j) = 0$$

$$\rho' + \delta r\, \partial_r \rho + \rho \left\{ \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \delta r) + \frac{1}{\sin\theta} \partial_\theta (\sin\theta\, \delta\theta) + \partial_\varphi \delta\varphi \right\} = 0$$

Eq. de mouvement (sans viscosité) :

$$\partial_t(\rho v^i) + D_j(\rho v^i v^j) = -\rho g^{ij} D_j \phi - g^{ij} D_j P$$

$$\sigma^2 \rho\, \delta x^i = \rho' g^{ij} D_j \phi + \rho g^{ij} D_j \phi' - g^{ij} D_j P'$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma^2 \delta r &= \frac{\rho'}{\rho} \partial_r \phi + \partial_r \phi' + \frac{1}{\rho} \partial_r P' \\ \sigma^2 \delta\theta &= \frac{1}{r^2} \partial_\theta \left(\phi' + \frac{P'}{\rho} \right) \\ \sigma^2 \delta\varphi &= \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \partial_\varphi \left(\phi' + \frac{P'}{\rho} \right) \end{aligned} \right.$$

Eq. de Poisson

$$\Delta \phi = 4\pi G \rho$$

$$\Delta \phi' = 4\pi G \rho'$$

$$\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \phi') + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \partial_\theta \left(\sin\theta\, \partial_\theta \phi' \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \partial_\varphi^2 \phi' = 4\pi G \rho'$$

Equation adiabatique :

$$\frac{P'}{P} + \frac{\delta x^j}{P} \nabla_j P = \gamma \left[\frac{\rho'}{\rho} + \frac{\delta x^j}{\rho} \nabla_j \rho \right]$$

où on a noté γ le coefficient $\Gamma_1 = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right)_S$

$$\frac{P'}{P} + \frac{\delta r}{P} \partial_r P = \gamma \left[\frac{\rho'}{\rho} + \frac{\delta r}{\rho} \partial_r \rho \right]$$

En substituant dans l'éq. de continuité les expressions de $\delta\theta$ et $\delta\varphi$ données par l'éq de mouvement, il vient

$$\frac{\rho'}{\rho} + \frac{\delta r}{\rho} \partial_r \rho + \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \delta r) + \frac{1}{r^2 \sigma^2} \left\{ \frac{1}{\sin\theta} \partial_\theta \left(\sin\theta\, \partial_\theta \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \partial_\varphi^2 \right\} \left(\phi' + \frac{P'}{\rho} \right) = 0$$

Ecrivons
$$\rho' = \sqrt{4\pi} \sum_{l,m} \rho'_{lm}(r)\, Y_l^m(\theta,\varphi)$$

$$P' = \sqrt{4\pi} \sum_{lm} P'_{lm}(r)\, Y_l^m(\theta,\varphi)$$

$$\phi' = \sqrt{4\pi} \sum_{lm} \phi'_{lm}(r)\, Y_l^m(\theta,\varphi)$$

$$\delta r = \sqrt{4\pi} \sum_{lm} \delta r_{lm}(r)\, Y_l^m(\theta,\varphi)$$

Il vient
$$\delta\theta = \frac{\sqrt{4\pi}}{r^2\sigma^2} \sum_{lm} \left(\phi'_{lm} + \frac{P'_{lm}}{\rho} \right) \partial_\theta Y_l^m(\theta,\varphi)$$

$$\delta\varphi = \frac{\sqrt{4\pi}}{r^2\sigma^2} \frac{1}{\sin^2\theta} \sum_{lm} \left(\phi'_{lm} + \frac{P'_{lm}}{\rho} \right) \partial_\varphi Y_l^m(\theta,\varphi)$$

Les équations différentielles se séparent en systèmes qui ne contiennent plus que les grandeurs relatives à un seul (l,m). Convenons de ne considérer dans la suite qu'un mode (l,m) déterminé et d'omettre les indices l, m. Il vient :

$$\frac{\rho'}{\rho} + \frac{\delta r}{\rho}\partial_r \rho + \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2 \delta r\right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2\sigma^2}\left(\phi' + \frac{p'}{\rho}\right) = 0$$

$$\sigma^2 \delta r = g\frac{\rho'}{\rho} + \partial_r \phi' + \frac{1}{\rho}\partial_r p'$$

$$\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2 \partial_r \phi'\right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\phi' = 4\pi G \rho'$$

$$\frac{p'}{p} + \frac{\delta r}{p}\partial_r p = \gamma\left(\frac{\rho'}{\rho} + \frac{\delta r}{\rho}\partial_r \rho\right)$$

Conditions aux limites :

Au centre on exigera que les grandeurs physiques restent régulières

A la surface, on devra avoir

1°) $\delta p = 0$

2°) $\delta\phi$ et $\delta D_i \phi$ continues. Tenant compte du fait qu'à l'extérieur de la sphère, la solution est de la forme

$\phi' = \text{cte} / r^{\ell+1}$, cette condition s'écrit

$$\partial_r \phi' + \frac{\ell+1}{r}\phi' = -4\pi G \rho\, \delta r$$

Oscillations radiales

$\ell = 0$

On substitue à ρ' son expression tirée de l'équation de continuité dans l'équation de Poisson :

$$\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\phi'\right) = -\frac{4\pi G}{r^2}\partial_r\left(r^2\delta r\right)$$

Cette équation s'intègre immédiatement

$$\partial_r\phi' = -4\pi G\rho\,\delta r$$

L'équation du mouvement peut alors s'écrire

$$\sigma^2\delta r = g\frac{\rho'}{\rho} - 4\pi G\rho\,\delta r + \frac{1}{\rho}\partial_r p'$$

En termes de perturbations lagrangiennes le système peut s'écrire

$$\partial_r\delta r = -2\frac{\delta r}{r} - \frac{1}{\gamma}\frac{\delta P}{P}$$

$$\partial_r\delta P = \rho\sigma^2\delta r - 4\partial_r P\,\frac{\delta r}{r}$$

Posons
$$Y = \delta r/r$$
$$Z = \delta P/P$$
$$\omega^2 = \frac{R^3\sigma^2}{GM}$$

Il vient :

$$\partial_x Y = -\frac{3}{x}Y - \frac{1}{\gamma x}Z$$

$$\partial_x Z = \left(4\frac{q}{x^3} + \omega^2\right)\frac{GM\rho}{RP}\,xY + \frac{GM\rho}{RP}\cdot\frac{q}{x^3}\cdot xZ$$

en $x = 0$ $\quad 3\gamma Y + Z = 0$

en surface $\quad \left(4\frac{q}{x^3} + \omega^2\right)Y + \frac{q}{x^3}Z = 0$

$$\frac{\delta\vec{r}}{R} = xY\,\vec{e}_r\cos\sigma t$$

$$\frac{\delta P}{P} = Z\cos\sigma t$$

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{1}{\gamma}Z\cos\sigma t$$

Oscillations non radiales

$\ell \neq 0$

Posons $\quad A = \partial_r \ln \rho - \frac{1}{\gamma} \partial_r \ln P$

$$\delta r / R = x^{\ell-1} y$$
$$R P' / G M \rho = x^\ell z$$
$$R \phi' / G M = x^\ell u$$
$$R^2 \partial_r \phi' / G M = x^{\ell-1} v$$

On obtient le système

$$\partial_x y = \frac{\ell+1}{x} \left[-y + \frac{\ell}{\omega^2}(u+z) \right] + \frac{x}{\gamma} \cdot \frac{G M \rho}{R P} \left(\frac{q}{x^3} y - z \right)$$

$$\partial_x z = \frac{1}{x} \left(\omega^2 y - \ell z - v \right) + \frac{RA}{x} \cdot x \cdot \left(\frac{q}{x^3} y - z \right)$$

$$\partial_x u = \frac{1}{x} (v - \ell u)$$

$$\partial_x v = \frac{\ell+1}{x} (\ell u - v) + \frac{4\pi R^3 \rho}{M} x \left(\frac{1}{\gamma} \frac{G M \rho}{R P} \cdot z - \frac{RA}{x} \cdot y \right)$$

en $x = 0 \qquad y = \frac{\ell}{\omega^2}(u+z)$

$$v = \ell u$$

en surface $\qquad \frac{q}{x^3} y = z$

$$v + (\ell+1) u + \frac{4\pi R^3 \rho}{M} y = 0$$

Définissons de nouvelles variables Y, Z, U, V. Elles ont la propriété d'être continues, même aux points de discontinuité de ρ.

$$Y = y$$
$$Z = \frac{G M \rho}{R P} \left(z - \frac{q}{x^3} y \right) \qquad \text{notons que } \frac{\delta P}{P} = x^\ell Z$$

$$U = u$$
$$V = v + \frac{4\pi R^3 \rho}{M} y$$

On a alors

$$\partial_x Y = \frac{\ell+1}{x}\left\{-Y + \frac{\ell}{\omega^2}\left(U + \frac{RP}{GM\rho}Z + \frac{q}{x^3}Y\right)\right\} - \frac{xZ}{\gamma}$$

$$\partial_x Z = \frac{GM\rho}{RP}\left\{\left[\omega^2 + 4\frac{q}{x^3} - \frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2}\left(\frac{q}{x^3}\right)^2\right]\frac{Y}{x}\right.$$

$$\left. + x\frac{q}{x^3}Z - \frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2 x}\frac{q}{x^3}U - \frac{V}{x}\right\}$$

$$- \left[\ell + \frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2}\frac{q}{x^3}\right]\frac{Z}{x}$$

$$\partial_x U = \frac{1}{x}\left(V - \frac{4\pi R^3\rho}{M}Y - \ell U\right)$$

$$\partial_x V = \frac{\ell+1}{x}\left\{\ell U - V + \frac{4\pi R^3\rho}{M}\frac{\ell}{\omega^2}\left(\frac{q}{x^3}Y + \frac{RP}{GM\rho}Z + U\right)\right\}$$

en $x=0$:

$$Y = \frac{\ell}{\omega^2}\left[\frac{q}{x^3}Y + \frac{RP}{GM\rho}Z + U\right]$$

$$V = \frac{4\pi R^3\rho}{M}Y + \ell U$$

en surface :

$$\left[\omega^2 + 4\frac{q}{x^3} - \frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2}\left(\frac{q}{x^3}\right)^2\right]\frac{Y}{x} + x\frac{q}{x^3}Z$$

$$- \frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2 x}\frac{q}{x^3}U - \frac{V}{x} = 0$$

$$V + (\ell+1)U = 0$$

On a

$$\frac{\delta\vec{r}}{R} = \left[\xi_r(r)\,\vec{a}_r(\theta,\varphi) + \xi_t(r)\,\vec{a}_t(\theta,\varphi)\right]\cos\sigma t$$

pas correct car $\vec{a}_t$ a une composante complexe

avec $\vec{a}_r(\theta,\varphi) = \sqrt{4\pi}\,Y_\ell^m(\theta,\varphi)\,\vec{e}_r$

$$\vec{a}_t(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{4\pi}{\ell(\ell+1)}}\left[\partial_\theta Y_\ell^m(\theta,\varphi)\cdot\vec{e}_\theta + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi Y_\ell^m(\theta,\varphi)\cdot\vec{e}_\varphi\right]$$

$$\xi_r = x^{\ell-1}\,Y$$

$$\xi_t = x^{\ell-1}\frac{\sqrt{\ell(\ell+1)}}{\omega^2}\left(U + \frac{RP}{GM\rho}Z + \frac{q}{x^3}Y\right)$$

$$\frac{\delta p}{p} = x^{\ell} z \sqrt{4\pi}\, Y_\ell^m(\theta,\varphi) \cos \sigma t$$

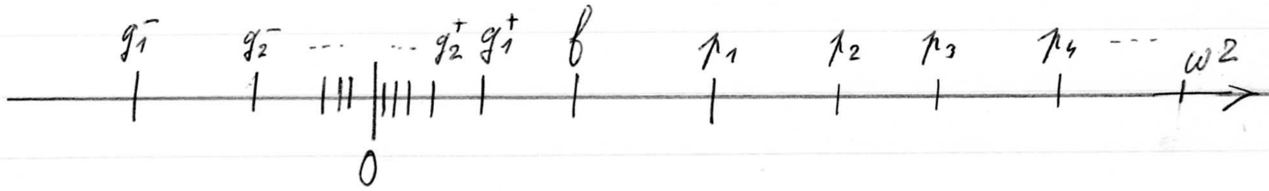
$$\frac{R p'}{G M \rho} = x^{\ell} \left(\frac{q}{x^3} y + \frac{R p}{G M \rho} z \right) \sqrt{4\pi}\, Y_\ell^m(\theta,\varphi) \cos \sigma t$$

$$\frac{R \phi'}{G M} = x^{\ell} u \sqrt{4\pi}\, Y_\ell^m(\theta,\varphi) \cos \sigma t$$

$$\frac{R^2}{G M} \partial_r \phi' = x^{\ell-1} \left[v - \frac{4\pi R^3 \rho}{M} y \right] \sqrt{4\pi}\, Y_\ell^m(\theta,\varphi) \cos \sigma t$$

Le spectre des modes non-radiaux

Pour chaque valeur de ℓ, on a le schéma :



Si $A \geq 0$ partout, il n'y a pas de modes g^+
Si $A \leq 0$ partout, il n'y a pas de modes g^-
Si $\ell = 1$, il n'y a pas de mode f (ou plus exactement, il lui correspond une fréquence nulle, décrivant un déplacement solide de la sphère)

Références

P. Ledoux, Th. Walraven, 1958, Variable stars, in Hdb der Physik, 51, 353–604

A. Boury, M. Gabriel, A. Noels, R. Scuflaire, P. Ledoux, 1975, Astron. Astrophys., 41, 279–285. Vibrational instability of a 1 $M_\odot$ star towards non-radial oscillations.

Les coordonnées polaires

$$x = r \sin\theta \cos\varphi$$
$$y = r \sin\theta \sin\varphi$$
$$z = r \cos\theta$$

$$\frac{\partial(x\,y\,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial(r,\theta,\varphi)}{\partial(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi & \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi & -\frac{1}{r}\sin\theta \\ -\frac{1}{r\sin\theta}\sin\varphi & \frac{1}{r\sin\theta}\cos\varphi & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$$

Métrique

$$[g_{ij}] = \mathrm{diag}\left(1, r^2, r^2\sin^2\theta\right)$$

$$[g^{ij}] = \mathrm{diag}\left(1, \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right)$$

Dérivées covariantes

$$D_i\phi = \partial_i\phi$$

$$D_i u^j = \partial_i u^j + \Gamma^j_{ik}u^k$$

$$D_i u_j = \partial_i u_j - \Gamma^k_{ij}u_k$$

Les Γ_{ij}^{k} non nuls sont les suivants :

$$\Gamma_{22}^{1} = -r \qquad \Gamma_{12}^{2} = \Gamma_{21}^{2} = \frac{1}{r} \qquad \Gamma_{13}^{3} = \Gamma_{31}^{3} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{33}^{1} = -r\sin\theta \qquad \Gamma_{33}^{2} = -\sin\theta\cos\theta \qquad \Gamma_{23}^{3} = \Gamma_{32}^{3} = \cot\theta$$

Notons que

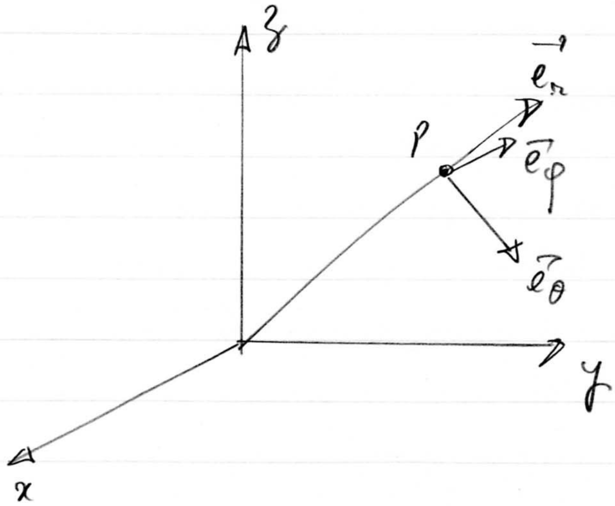
$$\Gamma_{1k}^{k} = \frac{2}{r} \qquad \Gamma_{2k}^{k} = \cot\theta \qquad \Gamma_{3k}^{k} = 0$$

Divergence d'un vecteur

$$\operatorname{div}\vec{u} = \frac{\partial u^r}{\partial r} + \frac{\partial u^\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{r}u^r + \cot\theta \cdot u^\theta$$

Laplacien d'un scalaire

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$



$$\vec{e}_r = \sin\theta \cos\varphi \, \vec{e}_x + \sin\theta \sin\varphi \, \vec{e}_y + \cos\theta \, \vec{e}_z$$
$$\vec{e}_\theta = \cos\theta \cos\varphi \, \vec{e}_x + \cos\theta \sin\varphi \, \vec{e}_y - \sin\theta \, \vec{e}_z$$
$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi \, \vec{e}_x + \cos\varphi \, \vec{e}_y$$

Les harmoniques sphériques

1. Polynômes de Legendre et fonctions associées

Ces fonctions sont définies pour des paramètres l et m entiers :

$l = 0, 1, 2, \ldots$

$m = 0, 1, \ldots, l$.

Les polynômes de Legendre correspondent au cas $m = 0$

Notations : P_l^m ~~...~~ ; $P_l = P_l^0$

Ce sont des fonctions d'une variable $\mu \in$ ~~...~~ $[-1, 1]$. Soit $\mu = \cos\theta$

Pour $|r| < 1$, on a

$$\frac{(2m)!}{2^m m!} \frac{\sin^m\theta}{\left[1 - 2r\cos\theta + r^2\right]^{m+1/2}} = \sum_{l=m}^{\infty} r^{l-m} P_l^m(\cos\theta)$$

pour $m = 0$:
$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\cos\theta + r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(\cos\theta)$$

On peut écrire ces fonctions explicitement

$$P_l^m(\cos\theta) = \frac{1}{2^l} \sin^m\theta \sum_{j=0}^{\frac{l-m}{2}} (-1)^j \frac{(2l-2j)!}{j!\,(l-j)!\,(l-m-2j)!} \cos^{l-m-2j}\theta$$

$$P_l(\cos\theta) = \frac{1}{2^l} \sum_{j=0}^{l/2} (-1)^j \frac{(2l-2j)!}{j!\,(l-j)!\,(l-2j)!} \cos^{l-2j}\theta$$

En utilisant les symboles

$(a, n) = a(a-1)\cdots(a-n+1)$ n facteurs

$(a, b, n) = a(a-b)\cdots(a-(n-1)b)$ n facteurs

On peut réécrire ces ~~définitions~~ expressions

$$P_\ell^m(\cos\theta) = \frac{(2\ell)!}{2^\ell\, \ell!\,(\ell-m)!} \sin^m\theta \sum_{j=0}^{\frac{\ell-m}{2}} (-1)^j \frac{(\ell-m,\, 2j)}{2^j\, j!\,(2\ell-1, 2, j)} \cos^{\ell-m-2j}\theta$$

$$P_\ell(\cos\theta) = \frac{(2\ell)!}{2^\ell(\ell!)^2} \sum_{j=0}^{\ell/2} (-1)^j \frac{(\ell, 2j)}{2^j\, j!\,(2\ell-1, 2, j)} \cos^{\ell-2j}\theta$$

On vérifie aisément qu'on peut écrire aussi

$$P_\ell^m(\cos\theta) = \sin^m\theta \; \frac{d^m P_\ell(\cos\theta)}{(d\cos\theta)^m}$$

$$P_\ell(\cos\theta) = \frac{(-1)^\ell}{2^\ell\, \ell!} \; \frac{d^\ell \sin^{2\ell}\theta}{(d\cos\theta)^\ell}$$

Pour chaque valeur de $m = 0, 1, 2, \ldots$, les $P_\ell^m(\mu)$ $(\ell = m, m+1, \ldots)$ forment une suite orthogonale totale de $L_2[-1, 1]$

$$\int_{-1}^{+1} P_\ell^m(\mu)\, P_{\ell'}^m(\mu)\, d\mu = \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \delta_{\ell\ell'}$$

2. Les harmoniques sphériques

~~Ch~~ ~~coordonnées~~

Les harmoniques sphériques superficiels $Y_{l}^{m}(\theta,\varphi)$ sont définis pour $l=0,1,2,\dots$ et pour $m=-l,-l+1,\dots,0,1,\dots,l$, de la façon suivante

$$Y_{l}^{m}(\theta,\varphi)=(-1)^{m}\left[\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{1/2}P_l^{|m|}(\cos\theta)\,e^{im\varphi}$$

$$\theta\in[0,\pi]\qquad \varphi\in[0,2\pi]$$

En coordonnées polaires, le laplacien scalaire s'écrit

$$\Delta=\frac{\partial}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$$

Les harmoniques sphériques sont fonctions propres de l'opérateur entre crochet

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]Y_l^m=-l(l+1)Y_l^m$$

Les Y_{lm} forment une suite orthonormée, totale dans $L_2\left([-1,1]\times[0,2\pi]\right)$ (la 1ère variable étant $\mu=\cos\theta$)

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}Y_{lm}(\theta,\varphi)\,\overline{Y}_{l'm'}(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=\delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

Posons $(f,g)=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f^*(\theta,\varphi)\,g(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$

On a pour $\forall f\in L_2$ $\quad f=\sum_l\sum_m\left(f,Y_l^m\right)Y_l^m$

$f,g\in L_2$ $\quad (f,g)=\sum_l\sum_m\left(f,Y_l^m\right)\left(g,Y_l^m\right)$

On notera que

$$\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\left[\left|\frac{\partial Y_l^m}{\partial\theta}\right|^2+\frac{1}{\sin^2\theta}\left|\frac{\partial Y_l^m}{\partial\varphi}\right|^2\right]=l(l+1)$$

Conditions limites d'atmosphère isotherme

On considère que le modèle donné est surmonté d'une atmosphère isotherme. Dans cette atmosphère isotherme on fait les approximations suivantes :

1) les coefficients des équations d'oscillations sont des constantes, cela permet de remplacer les $x\partial$ par un facteur multiplicatif λ

2) $\dfrac{4\pi R^3 \rho}{M}$ est pris $= 0$

Cas des oscillations radiales

Le syst. différentiel se réduit à

$$\begin{cases} (-3-\lambda)\,Y - \dfrac{1}{\gamma} Z = 0 \\ \left(4\dfrac{g}{x^3} + \omega^2\right)\dfrac{GM\rho}{RP}\,x^2 Y + \left(\dfrac{GM\rho}{RP}\dfrac{g}{x^3}x^2 - \lambda\right) Z = 0 \end{cases}$$

Annulons le dtm des coefficients

$$\lambda^2 - \left(\frac{GM\rho}{RP}\frac{g}{x^3}x^2 - 3\right)\lambda + \frac{GM\rho}{RP}\frac{x^2}{\gamma}\left\{\omega^2 + (4-3\gamma)\frac{g}{x^3}\right\} = 0$$

Posons

$$\alpha = x^2\frac{g}{x^3} - \frac{3RP}{GM\rho}$$

$$\beta = \frac{x^2}{\gamma}\left[\omega^2 + (4-3\gamma)\frac{g}{x^3}\right]$$

$$\Delta = \alpha^2 - 4\frac{RP}{GM\rho}\beta$$

L'équation aux valeurs propres s'écrit alors

$$\lambda = \frac{1}{2}\frac{GM\rho}{RP}\left\{\alpha \pm \sqrt{\Delta}\right\}$$

Si $\Delta > 0$ $\quad (\omega^2 < \omega_a^2)$

Il y a deux racines réelles, nous devons prendre la plus petite qui correspond à une onde stationnaire d'énergie finie.

C2

$$\lambda = \frac{1}{2}\frac{GM_\ell}{RP}\left\{\alpha - \sqrt{\Delta}\right\} = \frac{2\beta}{\alpha + \sqrt{\Delta}}$$

On peut alors prendre la solution

$$Y = 1$$
$$Z = -\gamma(\lambda + 3)$$

On vérifie aisément que dans le cas limite $\frac{RP}{GM_\ell} = 0$, on retrouve bien la condition limite habituelle

Si $\Delta < 0$ $\quad (\omega^2 > \omega_\alpha^2)$

Il n'y a plus d'onde stationnaire d'énergie finie. On ~~peut~~ pourrait alors sélectionner la racine λ qui correspond à une onde sortante, mais le problème ne peut plus être traité en variables réelles.

Cas des oscillations non radiales

Le syst. différentiel se réduit au système algébrique ;

$$\left\{-\lambda-\ell-1+\frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2}\frac{q}{x^3}\right\}Y + \left\{-\frac{x^2}{\gamma}+\frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2}\frac{RP}{GM_\ell}\right\}Z + \frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2}U = 0$$

$$\frac{GM_\ell}{RP}\left[\omega^2+4\frac{q}{x^3}-\frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2}\left(\frac{q}{x^3}\right)^2\right]Y + \left\{-\lambda-\ell-\frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2}\frac{q}{x^3}+\frac{GM_\ell}{RP}x^2\frac{q}{x^3}\right\}Z$$
$$-\frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2}\frac{GM_\ell}{RP}\frac{q}{x^3}U - \frac{GM_\ell}{RP}V = 0$$

$$[-\lambda + \ell]\,U + V = 0$$
$$\ell(\ell+1)\,U + [-\lambda-\ell-1]\,V = 0$$

La condition d'annulation du dtm des coefficients se factorise sous la forme

$$D1 . D2 = 0$$

avec

$$D1 = \lambda^2 + (2l+1)\lambda$$

$$D2 = \lambda^2 - \left\{ \frac{GM_p}{RP} \frac{q}{x^3} x^2 - 2l - 1 \right\} \lambda + \frac{GM_p}{RP} \frac{x^2\omega^2}{\gamma}$$

$$+ x^2 \frac{q}{x^3} \frac{GM_p}{RP} \left(\frac{4}{\gamma} - l - 1 \right) + \frac{l(l+1)}{\omega^2} \frac{q}{x^3} \left\{ \frac{GM_p}{RP} \frac{q}{x^3} x^2 \frac{\gamma - 1}{\gamma} - 3 \right\}$$

$D1 = 0$ donne les racines $\lambda = 0$ et $\lambda = -2l-1$, la première doit être écartée. Une solution correspondant à la racine acceptable $\lambda = -2l-1$ peut s'écrire comme suit

$$Y = -(l+1)\frac{x^2}{\gamma} - \frac{l(l+1)}{\omega^2} \cdot \frac{\gamma-1}{\gamma} \, x^2 \frac{q}{x^3}$$

$$Z = 3 \frac{l(l+1)}{\omega^2} \frac{q}{x^3}$$

$$U = \frac{x^2\omega^2}{\gamma} + \left(l + \frac{4}{\gamma} \right) x^2 \frac{q}{x^3} + \frac{l(l+1)}{\omega^2} \frac{\gamma-1}{\gamma} x^2 \left(\frac{q}{x^3} \right)^2$$

$$- 3 \frac{l(l+1)}{\omega^2} \frac{q}{x^3} \frac{RP}{GM_p}$$

$$V = -(l+1)\, U$$

On vérifie aisément que dans le cas limite $\frac{RP}{GM_p} = 0$ cette solution satisfait les conditions limites habituelles.

$D2 = 0$ se résout comme suit. Posons

$$\alpha = x^2 \frac{q}{x^3} - (2l+1) \frac{RP}{GM_p}$$

$$\beta = \frac{x^2\omega^2}{\gamma} + x^2 \frac{q}{x^3} \left(\frac{4}{\gamma} - l - 1 \right) + \frac{l(l+1)}{\omega^2} \frac{q}{x^3} \left\{ \frac{\gamma-1}{\gamma} x^2 \frac{q}{x^3} - 3 \frac{RP}{GM_p} \right\}$$

$$\Delta = \alpha^2 - 4 \frac{RP}{GM_p} \beta$$

Il vient $\lambda = \frac{1}{2} \frac{GM_p}{RP} \left\{ \alpha \pm \sqrt{\Delta} \right\}$

<u>Si $\Delta > 0$</u> $\quad (\omega_g^2 < \omega^2 < \omega_a^2)$

il y a deux racines réelles, on retiendra la plus petite, qui correspond à une onde stationnaire d'énergie finie

$$\lambda = \frac{1}{2}\frac{GM_p}{RP}\left(\alpha - \sqrt{\Delta}\right) = \frac{2\beta}{\alpha + \sqrt{\Delta}}$$

On peut alors prendre la solution

$$Y = \frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2}\frac{RP}{GM_p} - \frac{x^2}{\gamma}$$

$$Z = \lambda + \ell + 1 - \frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2}\frac{q}{x^3}$$

$$U = 0$$

$$V = 0$$

On vérifie aisément que dans le cas limite $\frac{RP}{GM_p} = 0$, cette solution satisfait aux conditions limites habituelles.

<u>Si $\Delta < 0$</u> $\left(\omega^2 < \omega_g^2 \text{ ou } \omega^2 > \omega_a^2\right)$

il y a deux racines complexes conjuguées. On n'a plus d'onde stationnaire d'énergie finie. Pour sélectionner l'onde "sortante", il faudrait travailler en variables complexes.