Académie royale de Belgique — Koninklijke Academie van België

BULLETIN DE LA CLASSE DES SCIENCES — MEDEDELINGEN VAN DE KLASSE DER WETENSCHAPPEN

5e Série — Tome LVII — 5de Reeks — Boek LVII

1971 — 10

EXTRAIT — UITTREKSEL

Sur la stabilité de configurations statiques vis-à-vis de perturbations adiabatiques

par R. SCUFLAIRE
Institut d'Astrophysique, Université de Liège.

BRUXELLES
PALAIS DES ACADÉMIES
RUE DUCALE, 1

BRUSSEL
PALEIS DER ACADEMIËN
HERTOGSSTRAAT, 1

1971

Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Séance du samedi 6 novembre 1971.

Sur la stabilité de configurations statiques vis-à-vis de perturbations adiabatiques

par R. SCUFLAIRE (*) (**)
Institut d'Astrophysique, Université de Liège.

Abstract. — On the basis of the energy principle it is shown quite geneally that Schwarzschild's criterion is a necessary condition of stability.

1. Introduction

Lebovitz [1, 2 et 3] a montré de façon rigoureuse que le critère de Schwarzschild [4] est une condition nécessaire et suffisante pour qu'une étoile en équilibre hydrostatique soit stable vis-à-vis de perturbations adiabatiques. La démonstration de Lebovitz repose sur le principe variationnel établi par Chandrasekhar [5, 6] permettant d'écrire les fréquences propres d'oscillations adiabatiques non radiales d'une étoile comme valeurs stationnaires d'une intégrale.

Nous nous proposons ici de montrer que le critère de Schwarzchild est une condition nécessaire de stabilité en nous appuyant sur un principe de minimum d'énergie [7]. Cette façon d'aborder le problème est particulièrement simple et ne nécessite qu'un très petit nombre d'hypothèses (par exemple nous ne devrons pas utiliser le fait qu'une configuration d'équilibre possède la symétrie sphérique).

Dans la section 2, nous précisons les limites du problème, les hypothèses et fixons les notations. Dans la section suivante, les équations de Poisson et d'équilibre hydrostatique sont obtenues

(*) Aspirant du Fonds National de la Recherche Scientifique.
(**) Présenté par M. P. Ledoux.

comme conditions suffisantes et nécessaires pour que l'énergie soit stationnaire. Dans la section 4 nous obtenons le critère de Schwarzschild comme condition nécessaire pour que l'énergie soit minimale.

2. Le principe de minimum d'énergie

Nous adopterons partout des coordonnées cartésiennes, ce qui permettra de ne pas distinguer les composantes covariantes et contravariantes. Nous écrirons partout les indices relatifs aux coordonnées en position inférieure.

Une configuration $\mathscr{C}$ sera définie par les fonctions suivantes de la variable $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3) \in \mathrm{R}^3$

$\rho(\boldsymbol{x})$ densité de matière au point $\boldsymbol{x}$

$\mathrm{S}(\boldsymbol{x})$ entropie par unité de masse au point $\boldsymbol{x}$

$\chi_i(\boldsymbol{x})$ abondance (exprimée en gr/gr) de l'élément i

$\phi(\boldsymbol{x})$ potentiel gravifique en $\boldsymbol{x}$

Les fonctions ρ, S et χ_i sont supposées continues presque partout. ϕ sera une fonction qui tend vers zéro à l'infini admettant des dérivées jusqu'à l'ordre 2, celles-ci étant continues presque partout.

A priori, nous ne supposerons pas que le potentiel gravifique satisfait à l'équation de Poisson. Nous déduirons celle-ci du principe de minimum d'énergie. En particulier, lorsque nous perturberons une configuration, nous pourrons perturber le potentiel gravifique de façon tout à fait arbitraire.

Précisons à présent la notion de perturbation adiabatique. Nous dirons qu'une configuration $\mathscr{C}'$ a été obtenue par une transformation adiabatique de la configuration $\mathscr{C}$ si elle résulte de celle-ci par un simple réarrangement spatial des éléments de matière de $\mathscr{C}$, chaque élément gardant sa masse, son entropie et sa composition chimique au cours de ce réarrangement. Une transformation de ce type peut être décrite par une fonction vectorielle $\psi_i(\boldsymbol{x})$ $(i = 1,2,3)$, continue et dérivable presque partout, application biunivoque de R^3 sur lui-même, telle que si x_1,x_2,x_3 sont les coordonnées d'un élément de matière après la transformation, $\psi_1(\boldsymbol{x}),\psi_2(\boldsymbol{x}),\psi_3(\boldsymbol{x})$ soient ses coordonnées avant la transformation. La conservation de la masse, de l'entropie et de la composition chimique permettent d'écrire les fonctions ρ', S' et χ_i' décrivant la configuration $\mathscr{C}'$ à partir des fonctions ρ, S et χ_i décrivant la configuration $\mathscr{C}$. On a

$$\begin{cases} \rho'(\boldsymbol{x}) = \rho(\psi(\boldsymbol{x}))\mathrm{D}(\boldsymbol{x}) \\ \mathrm{S}'(\boldsymbol{x}) = \mathrm{S}(\psi(\boldsymbol{x})) \\ \chi'(\boldsymbol{x}) = \chi_i(\psi(\boldsymbol{x})) \end{cases}$$

où $\mathrm{D}(\boldsymbol{x})$ est fonction des dérivées des ψ_i par rapport aux coordonnées

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{x}) = \left| dtm\left(\frac{\partial\psi_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\right)\right|$$

Nous ne ferons aucune restriction sur la perturbation du potentiel gravifique et prendrons pour ϕ' une fonction tout à fait quelconque (hormis le fait qu'elle admettra des dérivées secondes continues presque partout).

En résumé, nous décrirons une perturbation adiabatique à l'aide des fonctions $\psi_1(\boldsymbol{x}),\psi_2(\boldsymbol{x}),\psi_3(\boldsymbol{x}),\phi'(\boldsymbol{x})$. Ce sont ces fonctions qu'il faudra varier lors de l'application du principe de minimum d'énergie. Dans la suite, quand nous parlerons de stabilité, il sera toujours sous-entendu, vis-à-vis de perturbations adiabatiques. De même, $\mathscr{C}'$ désignera toujours une configuration obtenue de $\mathscr{C}$ par une transformation adiabatique.

Écrivons maintenant l'intégrale d'énergie. C'est une fonction qui à chaque configuration $\mathscr{C}$ fait correspondre l'énergie $\mathrm{V}(\mathscr{C})$ de la configuration par

$$\mathrm{V}(\mathscr{C}) = \int\left[\frac{1}{8\pi\mathrm{G}}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_i} + \rho\phi + \rho\mathrm{U}\right](dx)^3$$

où U est l'énergie interne par unité de masse (fonction de ρ et S) et où l'intégrale est étendue à tout l'espace. L'intégrand est supposé tendre suffisamment vite vers zéro à l'infini de sorte que l'intégrale garde une valeur finie. Le premier terme sous le signe d'intégration décrit l'énergie du champ gravifique, le second l'énergie d'interaction entre le champ et la matière, le dernier terme décrit l'énergie interne de la matière. Nous désignerons par $\mathscr{U}$ le terme entre crochets. Dans tout ce qui suit, nous adopterons ρ et S comme variables thermodynamiques indépendantes.

3. Configuration d'équilibre

Considérons une configuration $\mathscr{C}$. Nous dirons que c'est une configuration d'équilibre si la variation première de $V(\mathscr{C})$ est nulle pour une perturbation adiabatique. En d'autres termes, considérons une configuration $\mathscr{C}'$ obtenue par transformation adiabatique de $\mathscr{C}$ et soit

$$V(\mathscr{C}') = \int \mathscr{U}\left(\phi', \psi_j, \frac{\partial \phi'}{\partial x_i}, \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}\right)(dx)^3$$

$V(\mathscr{C}')$ devra être stationnaire quand on y fera

$$\phi'(\boldsymbol{x}) = \phi(\boldsymbol{x})$$

$$\psi_i(\boldsymbol{x}) = x_i.$$

L'annulation de la variation première d'une telle expression est équivalente aux équations d'Euler.

$$\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial \phi'} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial(\partial_j \phi')}\right) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial \psi_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial(\partial_j \psi_i)}\right) = 0 \tag{2}$$

(pour alléger les notations, nous avons écrit $\partial_j \phi'$ et $\partial_j \psi_i$ au lieu de

$$\frac{\partial \phi'}{\partial x_j} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}$$

L'expression (1) se calcule aisément, il vient

$$\rho' - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{4\pi G} \frac{\partial \phi'}{\partial x_i} = 0$$

elle doit être satisfaite pour $\phi' = \phi, \psi_i(x) = x_i$ ce qui donne l'équation de Poisson

$$\rho - \frac{1}{4\pi G} \Delta \phi = 0$$

L'expression (2) est un peu plus complexe

$$\phi' \frac{\partial \rho'}{\partial \psi_i} + \frac{\partial \rho'}{\partial \psi_i} U' + \frac{P'}{\rho'} \frac{\partial \rho'}{\partial \psi_i} + \rho' T' \frac{\partial S'}{\partial \psi_i} + \rho' \frac{\partial U'}{\partial \chi_j} \frac{\partial \chi_j}{\partial \psi}$$

$$- \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho' \phi' \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial(\partial_j \psi_i)} + \rho' U' \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial(\partial_j \psi_i)} + P' \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial(\partial_j \psi_i)}\right] = 0.$$

où P et T désignent respectivement la pression et la température. Elle doit être évaluée pour $\phi' = \phi$, $\psi_i = x_i$.

Notons que dans ce cas

$$\mathrm{D} = 1$$

$$\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial(\partial_j \psi_i)} = \delta_{ij}$$

Il vient alors

$$\left(\phi + \mathrm{U} + \frac{\mathrm{P}}{\rho}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \mathrm{T}\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \chi_j}\frac{\partial \chi_j}{\partial x_i}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\phi + \rho\mathrm{U} + \mathrm{P}) = 0$$

soit l'équation d'équilibre hydrostatique

$$-\rho\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x_i} = 0$$

Attirons l'attention sur le résultat bien connu que nous utiliserons au paragraphe suivant: cette équation implique le parallélisme des vecteurs **grad** ϕ et **grad** P.

Les surfaces équipotentielles sont donc également des surfaces de pression constante. Il en résulte que la densité est constante sur ces surfaces et que **grad** ρ est parallèle aux deux vecteurs précédents.

Lorsque l'équation de Poisson est satisfaite, l'énergie de la configuration peut se mettre sous une forme plus familière. Désignons par V le volume d'une sphère de rayon R et par Σ sa surface

$$\int_{\mathrm{V}} \frac{1}{8\pi \mathrm{G}}\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(dx)^3 =$$

$$= \frac{1}{8\pi \mathrm{G}}\int_{\mathrm{V}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)(dx)^3 - \frac{1}{8\pi \mathrm{G}}\int_{\mathrm{V}} \phi\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2}(dx)^3$$

On transforme la première intégrale du second membre en une intégrale de surface et dans la seconde on exprime le laplacien à l'aide de l'équation de Poisson. Il vient

$$\int_{\mathrm{V}} \frac{1}{8\pi \mathrm{G}}\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(dx)^3 = \frac{1}{8\pi \mathrm{G}}\oint_{\Sigma} \phi\frac{\partial \phi}{\partial x_i}d\Sigma_i - \frac{1}{2}\int_{\mathrm{V}} \rho\phi(dx)^3$$

Faison tendre R vers l'infini. ϕ décroît comme $\frac{1}{R}$ aux grandes distances et son gradient décroît comme $\frac{1}{R^2}$. Dans l'intégrale de surface, l'intégrand décroît comme $\frac{1}{R^3}$ alors que le domaine d'intégration croît comme R^2. L'intégrale décroît donc comme $\frac{1}{R}$ et s'annule lorsque R tend vers l'infini.

Il vient donc

$$\int \frac{1}{8\pi G} \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \frac{\partial\phi}{\partial x_i} (dx)^3 = -\frac{1}{2} \int \rho\phi (dx)^3$$

L'énergie totale de la configuration s'exprime donc par

$$V(\mathscr{C}) = \int \left[\frac{1}{2}\rho\phi + \rho U\right] (dx)^3$$

4. Configuration d'équilibre stable

On dira que $\mathscr{C}$ est une configuration d'équilibre stable si pour toute configuration $\mathscr{C}'$ nous avons

$$V(\mathscr{C}') \geqslant V(\mathscr{C})$$

Nous exprimerons cette condition pour une configuration $\mathscr{C}'$ particulière, nous obtiendrons ainsi le critère de Schwarzschild comme condition nécessaire de stabilité. Définissons $\mathscr{C}'$ de la manière suivante. Considérons deux sphères S_1 et S_2 sans points communs, de centres et de rayons respectifs $\boldsymbol{x}^1$, r et $\boldsymbol{x}^2$, αr où α et r sont des nombres positifs. Nous obtiendrons $\mathscr{C}'$ à partir de $\mathscr{C}$ en permutant la matière contenue dans S_1 avec celle contenue dans S_2 et nous garderons le même potentiel gravifique.

Mathématiquement, cette transformation est décrite par

$$\phi'(\boldsymbol{x}) = \phi(\boldsymbol{x})$$

$$\psi_i(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} x_i \text{ si } \boldsymbol{x} \notin S_1 U S_2 \\ x_i^2 + \alpha(x_i - x_i^1) \text{ si } \boldsymbol{x} \in S_1 \\ x_i^1 + \frac{1}{\alpha}(x_i - x_i^2) \text{ si } \boldsymbol{x} \in S_2 \end{cases}$$

On aura donc

– si $\boldsymbol{x} \notin S_1 \cup S_2$

$$\rho'(\boldsymbol{x}) = \rho(\boldsymbol{x})$$

$$S'(\boldsymbol{x}) = S(\boldsymbol{x})$$

$$\chi_i'(\boldsymbol{x}) = \chi_i(\boldsymbol{x})$$

– si $\boldsymbol{x} \in S_1$

$$\rho'(\boldsymbol{x}) = \alpha^3 \rho[x_i^2 + \alpha(x_i - x_i^1)]$$

$$S'(\boldsymbol{x}) = S[x_i^2 + \alpha(x_i - x_i^1)]$$

$$\chi_j'(\boldsymbol{x}) = \chi_j[x_i^2 + \alpha(x_i - x_i^1)]$$

– si $\boldsymbol{x} \in S_2$

$$\rho'(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\alpha^3} \rho\left[x_i^1 + \frac{1}{\alpha}(x_i - x_i^2)\right]$$

$$S'(\boldsymbol{x}) = S\left[x_i^1 + \frac{1}{\alpha}(x_i - x_i^2)\right]$$

$$\chi_j'(\boldsymbol{x}) = \chi_j\left[x_i^1 + \frac{1}{\alpha}(x_i - x_i^2)\right]$$

La condition de stabilité $V(\mathscr{C}') - V(\mathscr{C}) \geqslant 0$ s'écrira $I_1 + I_2 - I_3 \geqslant 0$ où

$$I_1 = \int_{S_1} \rho'(\phi' + U')(dx)^3$$

$$I_2 = \int_{S_2} \rho'(\phi' + U')(dx)^3$$

$$I_3 = \int_{S_1 \cup S_2} \rho(\phi + U)(dx)^3$$

Faisons les changements de variables suivants:

– dans I_1

$$x_i = x_i^1 + \frac{1}{\alpha}(y_i - x_i^2)$$

– dans I_2

$$x_i = x_i^2 + \alpha(y_i - x_i^1)$$

– dans I_3

$$x_i = y_i$$

Il vient

$$I_1 = \int_{S_2} \rho(y)\left\{\phi\left[x_i^1 + \frac{1}{\alpha}(y_i - x_i^2)\right] + U[\lambda\rho(y), S(y), \chi(y)]\right\}(dy)^3$$

$$I_2 = \int_{S_1} \rho(y)\left\{\phi[x_i^2 + \alpha(y_i - x_i^1)] + U\left[\frac{1}{\lambda}\rho(y), S(y), \chi(y)\right]\right\}(dy)^3$$

$$I_3 = \int_{S_1 \cup S_2} \rho(y)\{\phi(y) + U[\rho(y), S(y), \chi(y)]\}(dy)^3$$

où nous avons posé $\lambda = \alpha^3$. Le critère de stabilité devient

$$\int_{S_1} \rho(y)\left\{\phi[x_i^2 + \alpha(y_i - x_i^1)] - \phi(y) + U\left[\frac{1}{\lambda}\rho(y), S(y), \chi(y)\right] - \right.$$
$$\left. - U[\rho(y), S(y), \chi(y)]\right\}(dy)^3 +$$
$$+ \int_{S_2} \rho(y)\left\{\phi\left[x_i^1 + \frac{1}{\alpha}(y_i - x_i^2)\right] - \phi(y) + U[\lambda\rho(y), S(y), \chi(y)] - \right.$$
$$\left. - U[\rho(y), S(y), \chi(y)]\right\}(dy)^3 \geqslant 0$$

Divisons les deux membres par $\dfrac{4\pi r^3}{3}$ et faisons tendre r vers zéro. L'expression du premier membre tend vers une limite finie qui doit satisfaire à l'inégalité.

$$\rho_1\left\{\phi_2 - \phi_1 + U\left(\frac{\rho_1}{\lambda}, S_1, \chi_1\right) - U(\rho_1, S_1, \chi_1)\right\}$$
$$+ \lambda\rho_2\{\phi_1 - \phi_2 + U(\lambda\rho_2, S_2, \chi_2) - U(\rho_2, S_2, \chi_2)\} \geqslant 0$$

où les indices 1 et 2 indiquent que les grandeurs qu'ils affectent doivent être évaluées en x^1 et x^2 respectivement.

Ce critère prend des formes intéressantes pour certaines valeurs particulières de λ.

Pour $\lambda = 1$, il se réduit à

$$(\rho_2 - \rho_1)(\phi_2 - \phi_1) \leqslant 0.$$

Si ρ est continue et dérivable au point x^1, écrivons $x_i^2 = x_i^1 + \alpha h_i$. Divisons les deux membres par α^2 et faisons tendre α vers zéro. Il vient

$$(\boldsymbol{h}\ .\ \mathbf{grad}\ \rho)\,(\boldsymbol{h}\ .\ \mathbf{grad}\ \phi) \leqslant 0.$$

Comme nous avons déjà noté que les vecteurs **grad** ρ et **grad** ϕ étaient parallèles, cette inégalité signifie qu'ils doivent être de sens opposés.

Pour $\lambda = \rho_1/\rho_2$ le critère prend la forme

$$\mathrm{U}(\rho_1,\mathrm{S}_2,\chi_2) + \mathrm{U}(\rho_2,\mathrm{S}_1,\chi_1) - \mathrm{U}(\rho_1,\mathrm{S}_1,\chi_1) - \mathrm{U}(\rho_2,\mathrm{S}_2,\chi_2) \geqslant 0$$

Supposons ρ,S et χ_i continues et dérivables en x^1 et posons $x_i^2 = x_i^1 + \alpha h_i$. Divisons les deux membres par α^2 et faisons tendre α vers zéro. Il vient

$$(\boldsymbol{h}\cdot\mathbf{grad}\,\rho)\left\{\boldsymbol{h}\cdot\left[(\Gamma_3 - 1)\frac{\mathrm{T}}{\rho}\mathbf{grad}\,\mathrm{S} + \Sigma_j\frac{\partial\mu_j}{\partial\rho}\mathbf{grad}\,\chi_j\right]\right\} \leqslant 0$$

où μ_j désigne le potentiel chimique par gramme de l'élément j.

Observons que le terme entre crochets est égal à

$$-\frac{1}{\Gamma_1\mathrm{P}\rho^2}\mathbf{A} \quad \text{où} \quad \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\mathbf{grad}\,\rho - \frac{1}{\Gamma_1\mathrm{P}}\mathbf{grad}\,\mathrm{P}$$

Il vient

$$(h\ .\ \mathrm{grad}\ \rho)\,(h\ .\ \mathrm{A}) \geqslant 0.$$

Nous avons observé précédemment le parallélisme de **grad** ρ et **grad** ρ. Il en résulte que **A** est également parallèle à ces vecteurs. L'inégalité obtenue signifie que A est de même sens que **grad** ρ, Si on joint la déduction précédente (obtenue pour $\lambda = 1$) à celle-ci, on obtient le critère de stabilité: **grad** ϕ et **A** doivent être de sens opposés. Il est aisé de voir que cet énoncé est équivalent au critère de Schwarzchild. Notons que la condition sur le sens de **grad** ρ se déduit aisément de cet énoncé.

Nous avons obtenu ce critère sans perturber le potentiel gravifique. Cette possibilité est liée au fait que si on calcule le potentiel gravifique en résolvant l'équation de Poisson, la perturbation de l'énergie gravifique est un infiniment petit d'ordre supérieur à la perturbation de l'énergie interne (rappelons que celle-ci est de l'ordre de r^3). Lebovitz [2] avait déjà montré que la perturbation du potentiel gravifique est nulle à la limite de l'instabilité. La solution de l'équation de Poisson peut se mettre sous la forme

$$\phi(x) = -\mathrm{G}\int \frac{\rho(y)}{|x-y|}(dy)^3$$

Calculons la variation de ϕ lorsque l'on passe de la configuration $\mathscr{C}$ à la configuration $\mathscr{C}'$

$$\phi'(x) - \phi(x) = -\mathrm{G}\int \frac{\rho'(y)-\rho(y)}{|x-y|}(dy)^3$$

$$= -\mathrm{G}\int_{\mathrm{S}_1} \frac{\rho'(y)-\rho(y)}{|x-y|}(dy)^3 - \mathrm{G}\int_{\mathrm{S}_2} \frac{\rho'(y)-\rho(y)}{|x-y|}(dy)^3$$

$$= -\mathrm{G}\int_{\mathrm{S}_1} \frac{\lambda\rho[\psi(y)]-\rho(y)}{|x-y|}(dy)^3 - \mathrm{G}\int_{\mathrm{S}_2} \frac{\frac{1}{\lambda}\rho[\psi(y)]-\rho(y)}{|x-y|}(dy)^3$$

Divisons par $\frac{4\pi r^3}{3}$ et faisons tendre r vers zéro

$$\lim_{r\to 0}\frac{\phi'(x)-\phi(x)}{\frac{4\pi r^3}{3}} = -\mathrm{G}\frac{\lambda\rho_2-\rho_1}{|x-x_1|} - \mathrm{G}\frac{\frac{1}{\lambda}\rho_1-\rho_2}{|x-x_2|}$$

Pour $\lambda = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ cette expression est nulle ainsi que la perturbation de l'énergie gravifique.

Remarquons que pour $\lambda = 1$, la perturbation de l'énergie interne est nulle (le volume des éléments considérés ne varie pas), mais la variation d'énergie gravifique diffère de zéro:

Posons

$$\mathrm{V_G} = \frac{1}{2}\int \rho(x)\phi(x)(dx)^3$$

$$\lim_{r\to 0}\frac{\mathrm{V'_G}-\mathrm{V_G}}{\frac{4\pi r^3}{3}} = \lim_{r\to 0}\frac{1}{\frac{4\pi r^3}{3}}\cdot\frac{1}{2}\int[\rho'\phi'-\rho\phi](dx)^3$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{1}{2}\int\frac{\phi'-\phi}{\frac{4\pi r^3}{3}}\rho'(dx)^3 + \lim_{r\to 0}\frac{1}{2}\int\frac{\phi(x)}{\frac{4\pi r^3}{3}}[\rho'(x)-\rho(x)](dx)^3$$

$$= \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2$$

$$\mathrm{I}_1 = \frac{1}{2}\mathrm{G}(\rho_2 - \rho_1)\lim \int \left\{ \frac{\rho'(\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_2|} - \frac{\rho'(\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1|} \right\} (dx)^3$$

$$= -\frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_1)\lim(\phi'_2 - \phi'_1) = -\frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_1)(\phi_2 - \phi_1)$$

$$\mathrm{I}_2 = -\frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_1)(\phi_2 - \phi_1)$$

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathrm{V}'_\mathrm{G} - \mathrm{V}_\mathrm{G}}{\frac{4\pi r^3}{3}} = -(\rho_2 - \rho_1)(\phi_2 - \phi_1)$$

5. Remerciements

Qu'il nous soit permis d'exprimer nos remerciements à Monsieur le Professeur Ledoux qui nous a suggéré ce travail et dont les conseils nous ont été précieux. Nous remercions également le Fonds National de la Recherche Scientifique pour le mandat qu'il nous a accordé.

RÉFÉRENCES

[1] Lebovitz, N.R., 1965, Ap. J., **142,** 229-242.
[2] Lebovitz, N.R., 1965, Ap. J., **142,** 1257-1260.
[3] Lebovitz, N.R., 1966, Ap. J., **146,** 946-949.
[4] Schwarzschild, M., 1958, *Structure and evolution of the Stars,* Princeton University Press, Princeton.
[5] Chandrasekhar, S., 1964, Ap. J., **139,** 664-674.
[6] Chandrasekhar, S. et Lebovitz, N.R., 1964, Ap. J., **140,** 1517-1528.
[7] Ledoux, P., 1958, *Stellar Stability,* Hdb der Phys., LI, 605-688, (edt S. Flügge, Marburg).