ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

BULLETIN DE LA CLASSE DES SCIENCES

5e série - Tome LX
1974 - 7

EXTRAIT

Influence de la convection sur la stabilité des oscillations non radiales des étoiles

PAR

M. GABRIEL, R. SCUFLAIRE, A. NOELS et A. BOURY
Institut d'Astrophysique de l'Université de Liège

BRUXELLES - PALAIS DES ACADÉMIES

Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique (Classe des Sciences)*
Séance du samedi 6 juillet 1974.

Influence de la convection sur la stabilité des oscillations non radiales des étoiles

M. GABRIEL, R. SCUFLAIRE, A. NOELS et A. BOURY (*)
Institut d'Astrophysique de l'Université de Liège

Résumé. — On étudie le couplage entre la convection et les oscillations non-radiales. L'analyse est limitée par l'absence d'une théorie adéquate de la convection turbulente ce qui implique l'utilisation d'une approximation équivalente à la théorie de Böhm-Vitense. Dans le cadre de cette approximation, une expression donnant l'influence de la convection sur la stabilité des oscillations stellaires est obtenue et est discutée brièvement. Le résultat obtenu est également valable pour les oscillations radiales.

Abstract. — The coupling between convection and non-radial oscillations is discussed. The limitation of the theory comes from the lack of a good theory for turbulent convection which implies the use of an approximation equivalent to the Böhm-Vitense theory. In the frame of this approximation an expression which gives the influence of convection on the stability of stellar oscillations is deduced. The result is briefly discussed and compared with previous works.

I. INTRODUCTION

On sait que la plupart des étoiles possèdent au moins une zone convective. Elle peut consister soit en un noyau convectif, comme c'est le cas dans les étoiles de la séquence principale qui ont une masse supérieure à environ 1,1 $M_\odot$ et dans toutes les étoiles brûlant l'hélium dans leurs régions centrales, soit en une enveloppe convective externe

(*) Présentés par M. P. LEDOUX.

qui est présente dans les étoiles de température effective inférieure à environ 7000° K.

Lorsqu'on aborde l'étude de la stabilité vibrationnelle des étoiles, on est donc presque toujours confronté avec le problème du couplage entre l'oscillation et la convection. Ce problème est très délicat dans le cas des milieux compressibles car il n'existe jusqu'à présent aucune théorie satisfaisante de la convection, même dans un état stationnaire. Nous sommes en fait limités par la nécessité d'utiliser la théorie de Böhm-Vitense pour la convection non perturbée ainsi que l'approximation de Boussinesq.

Le problème a déjà été abordé par Cowling (1935, 1938), Boury, Gabriel et Ledoux (1964), Cox *et al.* (1966) et Unno (1967) en vue de l'étude des oscillations radiales.

Dans ce qui suit, nous suivrons essentiellement la même approche qu'Unno. Celle-ci nous paraît, à l'heure actuelle, la plus appropriée. Toutefois, nous devrons généraliser son travail en vue des applications aux oscillations non radiales.

En premier lieu nous déduisons les équations décrivant la convection dans l'approximation de Boussinesq. Celles-ci, résolues dans l'approximation locale, admettent une solution stationnaire identique à celle donnée par la théorie de Böhm-Vitense. Du fait de l'utilisation de cette approximation, le problème du couplage entre la convection et les oscillations ne peut être formulé de façon univoque. L'ambiguïté est levée en s'imposant de retrouver la théorie de Böhm-Vitense lorsque le temps de relaxation de la convection est beaucoup plus court que la période de l'oscillation. Les résultats obtenus sont finalement comparés à ceux fournis par les travaux antérieurs et l'influence de la convection sur la stabilité est discutée dans quelques cas.

II. Équations fondamentales

Pour établir les équations du problème nous devons écrire les équations de l'hydrodynamique en y introduisant:

$$\rho = \bar{\rho} + \Delta\rho, \; p = \bar{p} + \Delta p, \; \mathrm{T} = \overline{\mathrm{T}} + \Delta\mathrm{T}, \vec{v} = \vec{u} + \vec{\mathrm{V}} \qquad (1)$$

où $\bar{\rho}$, $\bar{p}$, $\overline{\mathrm{T}}$ et $\vec{u}$ désignent des valeurs moyennes prises sur une surface de dimension très supérieure à celle des éléments turbulents. $\Delta\rho$, Δp, $\Delta\mathrm{T}$ et $\vec{\mathrm{V}}$ désignent les fluctuations locales dues à la convection. En particulier $\vec{V}$ est défini de telle sorte que le transfert global de matière par convection soit nul:

$$\overline{\rho\vec{V}} = 0$$

Les équations mettant en jeu les quantités moyennes sont obtenues en prenant la moyenne des équations écrites avec les variables générales (1). La soustraction de chaque équation ainsi obtenue de la forme générale correspondante fournit celles qui régissent les fluctuations.

Avant d'effectuer ces dérivations, revenons à la notion de grandeur moyenne. Dans une situation stationnaire, étant donné la symétrie sphérique du problème dans le cas stellaire, les moyennes seront définies sur une surface sphérique. Lorsque l'étoile est perturbée de façon quelconque, la symétrie sphérique disparaît et il devient nécessaire de limiter les dimensions maximales de la surface à des valeurs faibles vis-à-vis de la longueur d'onde horizontale de la perturbation. Les échelles caractéristiques des perturbations considérées devront donc être beaucoup plus grandes que celles de la convection. Cette limitation se retrouvera également plus loin. Écrivons maintenant les équations:

a) Équations de continuité.

Celle-ci s'écrit

$$\frac{\partial(\bar{\rho} + \Delta\rho)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [(\bar{\rho} + \Delta\rho)(\vec{u} + \vec{V})] = 0 \tag{3}$$

Cette relation donne pour les quantités moyennes:

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\bar{\rho}\vec{u}) = 0 \tag{4}$$

En soustrayant l'éq. (4) de l'éq. (3), nous obtenons

$$\frac{\partial\Delta\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\Delta\rho\vec{u} + \rho\vec{V}) = 0 \tag{5}$$

ou, si on pose:

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}}\right) + \frac{1}{\bar{\rho}}\vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}) = 0 \tag{7}$$

Cependant, dans la suite, on se limitera dans le traitement de la convection à l'approximation de Boussinesq pour laquelle (7) se ramène à:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \tag{8}$$

b) Équation de mouvement,

Elle s'écrit en coordonnées orthogonales:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v^j) + \sum_i \nabla_i(\rho v^i v^j) = -\sum_i [g^{ji}(\rho \nabla_i \phi + \nabla_i p) - \nabla_i B^{ij}] \tag{9}$$

où ϕ est le potentiel gravifique, ∇_i désigne la dérivée covariante et B^{ij} le tenseur des tensions gazeuses et radiatives.

En procédant comme ci-dessus nous obtenons pour les quantités moyennes:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} u^j) + \sum_i \nabla_i(\bar{\rho} u^i u^j + \overline{\rho V^i V^j}) = -\sum_i g^{ji}(\bar{\rho} \nabla_i \phi + \nabla_i \bar{p}) - \overline{\nabla_i B^{ij}(V)} \tag{10}$$

et pour les fluctuations:

$$\rho \frac{dV^j}{dt} = \sum_i g^{ji}\left(\frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}}\nabla_i \bar{p} - \nabla_i \Delta p\right)$$

$$-\sum_i\left(\rho V^i \nabla_i V^j + \nabla_i B^{ij} - \overline{\nabla_i B^{ij}} - \frac{\rho}{\bar{\rho}}\overline{\rho V^i \nabla_i V^j}\right) - \sum_i \rho V^i \nabla_i u^j \tag{11}$$

Nous supposerons avec Unno (1967) que:

$$\sum_i\left(\rho V^i \nabla_i V^j - \frac{\rho}{\bar{\rho}}\overline{\rho V^i \nabla_i V^j}\right) = \frac{\alpha}{\tau}\rho V^j \tag{12}$$

où α est une constante qui sera déterminée ultérieurement et τ est la vie moyenne des éléments turbulents.

Cette hypothèse est certes fort délicate car elle linéarise le terme responsable du caractère stochastique de la turbulence. Elle se situe toutefois au même niveau d'approximation que la théorie du libre parcours moyen utilisée en structure stellaire.

Le terme $\nabla_i B^{ij} - \overline{\nabla_i B^{ij}}$ est petit pour les composantes du mouvement correspondant aux grandes longueurs d'ondes du spectre de turbulence qui sont considérées ici et nous le négligerons. Il est toutefois essentiel à petite échelle où il assure la dissipation d'énergie cinétique de turbulence en chaleur.

c) Conservation de l'énergie.

L'équation de conservation de l'énergie thermique U s'écrit:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathrm{U}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \mathrm{U} \vec{v}) + p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \rho \varepsilon - \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{R}} + \sum_{ij} \mathrm{B}^{ij} \nabla_i v_j$$

$$= \rho \mathrm{D} + \sum_{ij} \mathrm{B}^{ij} \nabla_i v_j \tag{13}$$

où $\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{R}}$ désigne le flux radiatif d'énergie et ε le taux de génération d'énergie par les réactions nucléaires.

Si $\overline{\mathrm{U}}$ est défini tel que $\overline{\rho \mathrm{U}} = \bar{\rho} \overline{\mathrm{U}}$, il vient pour le milieu moyen:

$$\bar{\rho} \frac{d\overline{\mathrm{U}}}{dt} + \bar{p} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \overline{\vec{\nabla} \cdot (\rho \mathrm{U} \vec{\mathrm{V}})} + \overline{p \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{V}}} = \bar{\rho} \bar{\varepsilon} - \overline{\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{R}}} + \overline{\sum_{ij} \mathrm{B}^{ij} \Delta_i \mathrm{V}_j}$$

$$= \overline{\rho \mathrm{D}} + \overline{\sum_{ij} \mathrm{B}^{ij} \Delta_i \mathrm{V}_j} \tag{14}$$

Pour les fluctuations, on obtient si on néglige le terme $\Delta p \vec{\nabla} . \vec{u}$ ainsi que ceux dus à la viscosité moléculaire et radiative

$$\Delta \rho \frac{d\overline{\mathrm{U}}}{dt} + \rho \frac{d \Delta \overline{\mathrm{U}}}{dt} - \mathrm{U} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{\mathrm{V}}) + [\vec{\nabla} \cdot (\rho \mathrm{U} \vec{\mathrm{V}}) + p \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{V}}]$$

$$- [\overline{\vec{\nabla} \cdot (\rho \mathrm{U} \vec{\mathrm{V}})} - \overline{p \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{V}}}] = \rho \mathrm{D} - \overline{\rho \mathrm{D}}$$

Si l'on élimine $\overline{\mathrm{U}}$ et $\Delta \mathrm{U}$ au profit de $\overline{\mathrm{S}}$ et $\Delta \mathrm{S}$, en tenant compte que si on néglige Δp, $\Delta \mathrm{S} = \mathrm{C}_p \Delta \mathrm{T}/\mathrm{T}$, nous obtenons au premier ordre en les fluctuations:

$$\frac{\Delta(\rho \mathrm{T})}{\overline{\mathrm{T}}} \frac{d\overline{\mathrm{S}}}{dt} + \rho \frac{d \Delta \mathrm{S}}{dt} + \rho \vec{\mathrm{V}} \cdot \vec{\nabla} \overline{\mathrm{S}}$$

$$= \left(\frac{\rho \mathrm{D}}{\overline{\mathrm{T}}} - \rho \vec{\mathrm{V}} \cdot \vec{\nabla} \Delta \mathrm{S} \right) - \frac{\rho}{\bar{\rho}} \left(\frac{\overline{\rho \mathrm{D}}}{\overline{\mathrm{T}}} - \overline{\rho \vec{\mathrm{V}} \cdot \vec{\nabla} \Delta \mathrm{S}} \right) \tag{15}$$

Dans le même ordre d'idées que pour l'éq. (12) nous poserons:

$$\rho \left(\vec{\mathrm{V}} \cdot \vec{\nabla} \Delta \mathrm{S} - \frac{\overline{\rho \vec{\mathrm{V}} \cdot \vec{\nabla} \Delta \mathrm{S}}}{\bar{\rho}} \right) = \rho \frac{\Delta \mathrm{S}}{\tau} \tag{16}$$

Par ailleurs, nous adopterons également comme dans la théorie de Böhm-Vitense:

$$\frac{1}{\mathrm{T}} \left(\mathrm{D} - \frac{\overline{\rho \mathrm{D}}}{\bar{\rho}} \right) = - \omega_{\mathrm{R}} \Delta \mathrm{S} \tag{17}$$

où

$$\omega_R = \frac{4ac}{3} \frac{T^3}{C_p \varkappa \rho^2 \mathscr{L}^2} \tag{18}$$

$\mathscr{L}$ désignant une dimension linéaire caractéristique des éléments turbulents et κ le coefficient d'opacité par gramme.

L'éq. (15) devient donc:

$$\frac{1}{\rho T} \Delta(\rho T) \frac{d\bar{S}}{dt} + \frac{d\Delta S}{dt} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \bar{S} = -\left(\frac{\omega_R \tau + 1}{\tau}\right) \Delta S \tag{19}$$

Pour établir cette équation, nous avons supposé que $\Delta p/\bar{p}$ est négligeable vis-à-vis de $\Delta T/\bar{T}$ et $\Delta \rho/\bar{\rho}$. De ce fait ΔS et $\vec{\nabla}\bar{S}$ sont donnés par

$$\Delta S = C_p \frac{\Delta T}{\bar{T}} \tag{20}$$

et

$$\vec{\nabla}\bar{S} = C_p(\nabla - \nabla_{ad}) \vec{\nabla} \ln p \tag{21}$$

où

$$\nabla \equiv \frac{\partial \ln T}{\partial \ln p} \text{ et } \nabla_{ad} \equiv \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \equiv \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln p}\right)_S$$

Comme $\omega_R \Delta S$ représente l'entropie perdue par un élément turbulent, par unité de masse et de temps, et comme l'entropie qu'il acquiert vaut $\Delta S/\tau$, le paramètre $(\omega_R \tau)^{-1}$ s'introduit dans la théorie de Böhm-Vitense. En vue d'assurer l'égalité de $(\omega_R \tau)^{-1}$ avec la variable γ (voir Henyey *et al.* 1965) utilisée pour les calculs des modèles d'évolution stellaire que nous désirons étudier, nous devrons adopter:

$$\mathscr{L} = \frac{l_r}{\sqrt{2\pi}} \tag{22}$$

où l_r est le libre parcours moyen dans la direction radiale.

d) Équation de transfert.

On a

$$\vec{F} = \vec{F}_R + \vec{F}_c$$

où $\vec{F}$, $\vec{F}_R$ et $\vec{F}_c$ désignent respectivement le flux total, le flux radiatif et le flux convectif.

Si on définit ∇_R comme la valeur du gradient de température (par rapport à la pression), $\frac{dln\,T}{dln\,p}$, qui serait nécessaire pour que la radiation puisse transporter toute l'énergie produite par les réactions thermonucléaires, on a, en définissant $\overline{\Delta S}$ et $\overline{\vec{V}}$ comme les moyennes de ΔS et $\vec{V}$ prises uniquement sur les éléments montants, et en tenant compte de:

$$\vec{F}_c = \overline{\rho T \Delta S \vec{V}} \simeq \frac{1}{2}\bar{\rho}\bar{T}\overline{\Delta S}\overline{\vec{V}} \tag{23}$$

$$\frac{4ac}{3}\frac{T^4}{\varkappa\rho}(\bar{\nabla} - \bar{\nabla}_R)\vec{\nabla}\ln p = \frac{1}{2}\bar{\rho}\bar{T}\overline{\Delta S}\overline{\vec{V}}$$

ou

$$(\bar{\nabla} - \bar{\nabla}_R)\vec{\nabla}\ln p = \frac{1}{2}\omega_R^{-1}\mathscr{L}^{-2}\frac{\Delta T}{\bar{\bar{T}}}\overline{\vec{V}}$$

e) Équation d'état

Nous supposerons à nouveau que $\Delta p = 0$ et l'équation d'état donne alors pour les fluctuations:

$$\frac{\Delta T}{T} = Q\frac{\Delta\rho}{\rho} \tag{25}$$

où

$$Q = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho}\right)_p$$

En utilisant l'approximation de Boussinesq, nous nous limitons aux situations où la convection est fortement subsonique.

III. Solution stationnaire

Le système formé par les équations (7) ou (8), (11), (19), (24) et (25) admet une solution stationnaire. Celle-ci est identique à la théorie de Böhm-Vitense si l'on suppose constants les coefficients des fluctuations (approximation locale).

Si f désigne une quelconque des variables $\Delta\rho$, Δp, ΔS, V^i la solution dans une couche plane est de la forme:

$$f = f_a \exp\left[i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)\right]$$

où f_a est une constante.

L'approximation locale est valable si les échelles caractéristiques des coefficients sont grandes vis-à-vis des k_i^{-1}. Si tel est le cas, on peut également, avec une bonne précision, résoudre le problème dans l'espace euclidien tangent au point considéré.

Dans ces conditions, l'équation (8) devient:

$$\vec{k} \, . \, \vec{\mathrm{V}}_a = 0 \tag{27}$$

qui, combinée à l'équation (11) conduit à

$$\Delta p_a = i \frac{\Delta \rho_a}{\bar{\rho}} \frac{\vec{\nabla} \bar{p} \cdot \vec{k}}{k^2} \tag{28}$$

$$\vec{\mathrm{V}}_a = \frac{\Delta \rho_a}{\bar{\rho}} \frac{\tau}{\alpha} \left(\vec{\nabla} \bar{p} - \frac{\vec{k} \cdot \vec{\nabla} \bar{p}}{k^2} \vec{k} \right) \tag{29}$$

En passant aux composantes, (29) donne:

$$\mathrm{V}_a^j = -\frac{1}{\alpha} \frac{\Delta \rho_a}{\bar{\rho}^2} \frac{d\bar{p}}{dr} \frac{k^j k_r}{k^2} \tau \quad (j \neq r)$$

$$\mathrm{V}_a^r = \frac{1}{\alpha} \frac{\Delta \rho_a}{\bar{\rho}^2} \frac{d\bar{p}}{dr} \frac{k_{\mathrm{H}}^2}{k^2} \tau \tag{30}$$

où l'indice r désigne la composante selon le rayon et où

$$k_{\mathrm{H}}^2 = \sum_{\substack{i \\ (i \neq r)}} k_i^2 \text{ et } k^2 = \sum_i k_i^2 = k_{\mathrm{H}}^2 + k_r^2$$

Si nous considérons que la turbulence est isotrope ($\mathrm{V}_i = \mathrm{V}_j$), nous devons imposer que

$$\vec{k} = \left(k_r, \pm \frac{k_r}{2}, \pm \frac{k_r}{2} \right) \tag{31}$$

la première composante de $\vec{k}$ se rapportant à la direction radiale. k_r reste indéterminé.

Si on prend pour τ la valeur:

$$\tau = \frac{l_r}{\mathrm{V}_a^r}, \tag{32}$$

la 2$^{\mathrm{e}}$ équation (30) devient

$$\mathrm{V}_r^2 = \frac{1}{3\alpha} \left| \frac{\overline{\Delta \rho_a}}{\bar{\rho}} \right| \frac{p \, l_r}{\rho \, \mathrm{H}_p} \tag{33}$$

où

$$H_p = \left| \frac{d \ln p}{dr} \right|^{-1}$$

est la hauteur d'échelle de pression.

Pour assurer l'identité entre (33) et l'expression de V_r donnée par Henyey *et al.* (1965) nous devons adopter $\alpha = \frac{2}{3}$ (34)

L'équation (19) devient en tenant compte de (20), (21), (32) et de

$$\Delta S_a = C_p \frac{\Delta T_a}{\overline{T}} = C_p(\nabla - \overline{\nabla}) \frac{d \ln p}{dr} l_r \tag{35}$$

$$\omega_R \tau + 1 = \frac{\overline{\nabla}_{ad} - \overline{\nabla}}{\nabla - \overline{\nabla}}$$

ou

$$(\omega_R \tau)^{-1} = \gamma = \frac{\overline{\nabla} - \nabla}{\nabla - \overline{\nabla}_{ad}} \tag{36}$$

En remplaçant dans (19) V_r, $\vec{\nabla} S$ et ΔS_a par leurs expressions données par (30), (21) et (35) on obtient

$$(\omega_R \tau + 1) + \frac{1}{3\alpha} \frac{p}{\rho Q \omega_R^2 H_p^2} (\overline{\nabla} - \overline{\nabla}_{ad})(\omega_R \tau)^2 = 0$$

ou

$$\gamma(\gamma + 1) - B(\overline{\nabla} - \overline{\nabla}_{ad}) = 0$$

avec

$$B = \frac{p}{3\alpha\rho \,|\, Q \,|\, \omega_R^2 H_p^2}$$

En éliminant $\frac{\Delta T_a}{\overline{T}}$ dans (24) à l'aide de (19) et V_a^r en tenant compte de (32), il vient

$$(\overline{\nabla}_R - \overline{\nabla}) = \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \left(\frac{l_r}{\mathscr{L}} \right)^2 (\overline{\nabla}_{ad} - \overline{\nabla})$$

et en éliminant $\overline{\nabla}$ à l'aide de (37), nous obtenons finalement

$$\frac{1}{2} \left(\frac{l_r}{\mathscr{L}} \right)^2 \gamma^3 + \gamma^2 + \gamma = B(\overline{\nabla}_R - \overline{\nabla}_{ad}) \tag{38}$$

Les équations (33), (36) et (38) sont identiques à celles obtenues par la théorie de Böhm-Vitense.

IV. Équations linéaires pour la convection non stationnaire

Nous devons linéariser les équations (8), (11), (19) et (24) en vue d'obtenir leur solution au voisinage du cas stationnaire. Les équations peuvent en principe être aisément perturbées. Toutefois nous devrons comme pour le cas stationnaire nous limiter à obtenir une solution dans l'approximation locale. Ceci impose

$$f(\vec{r},t) = f_a(t) \exp [i\vec{k} \,.\, (\vec{r} - \vec{r}_0)]$$

où $f_a(t)$ ne dépend que du temps. Deux approches sont alors possibles. Ou bien l'on continue à utiliser les moyennes définies sur la même surface sphérique que dans le cas stationnaire.

On écrit alors

$$f_a(t) = f_{a,0} + f_a e^{i\sigma t}$$

où

$$\sigma = \frac{2\pi}{\mathrm{P}};$$

P étant la période de la pulsation perturbatrice. Ou bien l'on définit les moyennes sur la surface obtenue par la déformation, du fait de la perturbation, de la surface sphérique considérée dans le cas stationnaire. Nous écrivons alors

$$f_a(t) = f_{a,0} + \delta f_a e^{i\sigma t}$$

Le premier point de vue est eulérien, le second lagrangien. Suivant le point de vue adopté nous devrons considérer que f_a ou δf_a sont constants. Ces deux hypothèses sont toutefois contradictoires. En effet, en toute généralité nous avons

$$\delta \nabla_j f = \nabla_j \delta f - \sum_i (\nabla_j \delta r^i) \nabla_i f$$

$$\delta \nabla_j f = \nabla_j f' + \sum_i \delta r^i \nabla_i \nabla_j f$$

et

$$\delta f = f' + \sum_i \delta r^i \nabla_i f$$

Si δf_a est constant la première de ces équations donne

$$\delta \nabla_j f = i\big(k_j \delta f_a - \sum_i \nabla_j \delta r^i k_i f_a\big) \exp \big[i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)\big]$$

Si, par contre, on suppose f'_a constant les deux dernières relations conduisent à

$$\delta \nabla_j f = ik_j \delta f_a \exp [i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)]$$

qui est en contradiction avec le résultat précédant.

Cette difficulté résulte évidemment de l'approximation locale. Nous avons, en vue de lever cette ambiguïté, imposé que le résultat final soit identique, pour une perturbation radiale, à celui obtenu en perturbant la solution stationnaire lorsque le temps caractéristique de la convection, τ, est beaucoup plus petit que la période de pulsation P c'est-à-dire dans le cas limite où $\sigma\tau = 0$. Cette condition nous impose d'admettre que

$$\delta \nabla_j f = \nabla_j \delta f$$

Nous adopterons le point de vue lagrangien. Cependant à cause de la relation qui précède, en remplaçant dans le résultat final les symboles de perturbation lagrangienne par ceux de perturbation eulérienne nous obtiendrons les résultats valables selon le point de vue eulérien.

Les équations perturbées s'écrivent finalement

$$\sum_i k_i \delta \mathrm{V}_a^i = 0 \tag{39}$$

$$\frac{i\sigma\tau + \alpha}{\tau} \delta \mathrm{V}_a^j = \delta\left(\frac{\Delta\rho_a}{\bar{\rho}}\right)\frac{\nabla^j \bar{p}}{\bar{\rho}} + \frac{\Delta\rho_a}{\bar{\rho}}\delta\left(\frac{\nabla^j \bar{p}}{\bar{\rho}}\right) - ik^j\left(\frac{\delta\Delta p_a}{\bar{\rho}} - \frac{\delta\bar{\rho}}{\bar{\rho}}\frac{\Delta p}{\bar{\rho}}\right)$$
$$+ \frac{\alpha \mathrm{V}^j}{\tau}\frac{\delta\tau}{\tau} - i\sigma(\vec{\mathrm{V}} \cdot \vec{\nabla})\delta r^j \tag{40}$$

$$\frac{i\sigma\tau}{i\sigma\tau + \omega_\mathrm{R}\tau + 1}\,\frac{1 + \mathrm{Q}}{\mathrm{QC}_p}\delta\bar{\mathrm{S}} + \frac{\delta\Delta\mathrm{S}_a}{\Delta\mathrm{S}_a}$$
$$= \frac{1}{i\sigma\tau + \omega_\mathrm{R}\tau + 1}\left[\frac{\delta\tau}{\tau} - \omega_\mathrm{R}\tau\frac{\delta\omega_\mathrm{R}}{\omega_\mathrm{R}} + (\omega_\mathrm{R}\tau + 1)\left(\frac{\delta \mathrm{V}_a^r}{\mathrm{V}_a^r} + \sum_i \frac{\mathrm{V}^i \delta\nabla_i \bar{\mathrm{S}}}{\mathrm{V}^r \dfrac{d\bar{\mathrm{S}}}{dr}}\right)\right] \tag{41}$$

En multipliant scalairement (40) par $\vec{k}$, on peut obtenir $\delta \Delta p_a$ et l'éliminer de (40). On obtient ainsi, le δ_{ij} étant le symbole de Kronecker

$$\frac{i\sigma\tau + \alpha}{3\alpha}\frac{\delta V^j}{V^r} = \frac{\delta\left(\frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}}\right)}{\frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}}}\left(\delta^{jr} - \frac{k_r k^j}{k^2}\right) + \sum_i \frac{\delta\left(\frac{\nabla^i \bar{p}}{\bar{\rho}}\right)}{\frac{1}{\rho}\frac{d\bar{p}}{dr}}\left(\delta_i^j - \frac{k^j k_i}{k^2}\right)$$

$$+ \frac{1}{3}\frac{V^j}{V^r}\frac{\delta\tau}{\tau} - \frac{i\sigma\tau}{3\alpha}\sum_{i,l}\frac{V^l}{V^r}\nabla_l \delta r^i\left(\delta_i^j - \frac{k^j k_i}{k^2}\right) \tag{42}$$

Il n'est plus nécessaire de conserver l'indice *a* car nous ne considérerons plus que les δf_a.

En tenant compte de (20) et (25) nous avons également

$$\frac{\delta \Delta S}{\Delta S} = \frac{\delta(C_p Q)}{C_p Q} + \frac{\delta\left(\frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}}\right)}{\frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}}} \tag{43}$$

l'éq. (32) donne

$$\frac{\delta\tau}{\tau} = \frac{\delta l_r}{l_r} - \frac{\delta V_r}{V_r} \tag{44}$$

L'éq. (23) conduit à

$$\frac{\delta F_c^i}{F_c^r} = \left(\frac{\delta\bar{\rho}}{\bar{\rho}} + \frac{\delta\bar{T}}{\bar{T}}\right)\delta^{ir} + \frac{\overline{V^i \delta\Delta S + \Delta S \delta V^i}}{\overline{\Delta S V^r}}$$

ou

$$\frac{\delta F_c^i}{F_c^r} = \left(\frac{\delta\bar{\rho}}{\bar{\rho}} + \frac{\delta\bar{T}}{\bar{T}}\right)\delta^{ir} + \frac{\overline{\delta V^i}}{\overline{V^r}} + \frac{\overline{V^i \delta\Delta S}}{\overline{\Delta S V^r}} \tag{45}$$

En éliminant $\delta\left(\frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}}\right)$ dans (42) à l'aide de (41) et (43) on obtient

$$\left[\frac{i\sigma\tau + 2\alpha}{\alpha} - \frac{\omega_R\tau}{i\sigma\tau + \omega_R\tau + 1}\right]\frac{\delta V^r}{V^r}$$

$$= -\left(\frac{\delta(C_p Q)}{C_p Q} + \frac{i\sigma\tau(1 + Q)\delta\bar{S}}{QC_p(i\sigma\tau + \omega_R\tau + 1)}\right) + [i\sigma\tau + \omega_R\tau + 1]^{-1} \times$$

$$\left[\frac{\delta l_r}{l_r} - \omega_R \tau \frac{\delta \omega_R}{\omega_R} + (\omega_R \tau + 1) \sum_i \frac{V^i}{V^r} \frac{\delta \nabla_i \bar{S}}{\dfrac{dS}{dr}}\right] + \frac{\delta l_r}{l_r} +$$

$$3\left[\sum_i \frac{\delta\left(\dfrac{\nabla^i \bar{p}}{\bar{\rho}}\right)}{\dfrac{1}{\bar{\rho}}\dfrac{d\bar{p}}{dr}}\left(\delta_i^r - \frac{k_i k^r}{k^2}\right)\right] - \frac{i\sigma\tau}{\alpha}\sum_{i,l}\frac{V^l}{V^r}\nabla_l \delta r^i\left(\delta_i^r - \frac{k_i k^r}{k^2}\right) \tag{46}$$

et si $j \neq r$

$$\frac{i\sigma\tau + \alpha}{\alpha}\frac{\delta V^j}{V^r} = \frac{V^j}{V^r}\left\{-\frac{\delta(C_p Q)}{C_p Q} + (i\sigma\tau + \omega_R\tau + 1)^{-1}\left[\frac{\delta l_r}{l_r} - i\sigma\tau\frac{1+Q}{Q}\delta\bar{S}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \omega_R\tau\left(\frac{\delta\omega_R}{\omega_R} - \frac{\delta V^r}{V^r}\right) + (\omega_R\tau + 1)\sum_i \frac{V^i}{V^r}\frac{\delta\nabla_i\bar{S}}{\dfrac{dS}{dr}}\right]\right\} + \frac{V^j}{V^r}\frac{\delta\tau}{\tau}$$

$$+ 3\sum_i \frac{\delta\left(\dfrac{\nabla^i p}{\rho}\right)}{\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp}{dr}}\left(\delta_i^j - \frac{k_i k^j}{k^2}\right) - \frac{i\sigma\tau}{\alpha}\sum_{i,l}\frac{V^l}{V^r}\nabla_l\delta r^i\left(\delta_i^j - \frac{k^j k_i}{k^2}\right) \tag{47}$$

En prenant la moyenne sur les 4 vecteurs $\vec{k}$ possibles pour un k_r donné, on obtient en tenant compte de (30)

$$\left(\frac{i\sigma\tau + 2\alpha}{\alpha} - \frac{\omega_R\tau}{i\sigma\tau + \omega_R\tau + 1}\right)\frac{\delta V^r}{V^r} = -\frac{\delta(C_p Q)}{C_p Q} + (i\sigma\tau + \omega_R\tau + 1)^{-1}$$

$$\left[\frac{\delta l_r}{l_r} - i\sigma\tau\frac{1+Q}{Q}\underset{c_p}{\delta\bar{S}} - \omega_R\tau\frac{\delta\omega_R}{\omega_R} + (\omega_R\tau + 1)\frac{\delta\dfrac{d\bar{S}}{dr}}{\dfrac{d\bar{S}}{dr}}\right]$$

$$+ \frac{\delta\left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp}{dr}\right)}{\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp}{dr}} + \frac{\delta l_r}{l_r} - \frac{i\sigma\tau}{3\alpha}\vec{\nabla}\cdot\delta\vec{r} \tag{48}$$

et pour $j \neq r$

$$\frac{i\sigma\tau + \alpha}{\alpha}\frac{\delta V^j}{V^r} = \frac{\delta(\nabla^j \overline{S})}{\dfrac{dS}{dr}} \frac{\omega_R\tau + 1}{i\sigma\tau + \omega_R\tau + 1} + \frac{5}{2}\frac{\delta\left(\dfrac{\nabla^j p}{\rho}\right)}{\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp}{dr}}$$

$$- \frac{i\sigma\tau}{\alpha}\left[\frac{5}{6}\nabla_r \delta r^j + \frac{1}{3}\nabla^j \delta r^r\right] + \left(\frac{\omega_R\tau}{i\sigma\tau + \omega_R\tau + 1} - 1\right)\frac{\overline{V^j\delta V^r}}{V^r V^r} \tag{49}$$

$$\frac{\delta\overline{\Delta S}}{\overline{\Delta S}} = \frac{1}{i\sigma\tau + \omega_R\tau + 1}\left[\frac{\delta l_r}{l_r} - \omega_R\tau\left(\frac{\delta\omega_R}{\omega_R} - \frac{\delta V^r}{V^r}\right) + (\omega_R\tau + 1)\frac{\delta\dfrac{d\overline{S}}{dr}}{\dfrac{dS}{dr}}\right] \tag{50}$$

$$\left(\frac{i\sigma\tau + 2\alpha}{\alpha} - \frac{\omega_R\tau}{i\sigma\tau + \omega_R\tau + 1}\right)\overline{\frac{V^j}{V^r}\frac{\delta V^r}{V^r}}$$

$$= \frac{\omega_R\tau + 1}{i\sigma\tau + \omega_R\tau + 1}\frac{\delta\nabla^j\overline{S}}{\dfrac{dS}{dr}} + \frac{\delta\dfrac{\nabla^j p}{\rho}}{\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp}{dr}} - \frac{i\sigma\tau}{3\alpha}(\nabla^j\delta r^r + \nabla_r\delta r^j) \tag{51}$$

Par ailleurs, on vérifie également aisément que

$$\frac{\overline{\delta(\Delta S)V^r}}{\overline{\Delta S V^r}} = \frac{\delta\overline{\Delta S}}{\overline{\Delta S}} \tag{52}$$

$$\frac{\overline{\delta(\Delta S)V^j}}{\overline{\Delta S}} = \frac{\omega_R\tau + 1}{i\sigma\tau + \omega_R\tau + 1}\left(\frac{\delta\nabla^j\overline{S}}{\dfrac{dS}{dr}} + \frac{\overline{V^j\delta V^r}}{V^r V^r}\right) \quad (j \neq r)$$

On peut voir également que

$$\overline{\sum_j \frac{V_j \delta V^j}{V^2}} = \frac{\overline{\delta V^r}}{\overline{V^r}} \tag{53}$$

Les équations (48) à (53) permettent de calculer les δF^i. Toutefois il reste à spécifier la valeur de δl_r. Comme l'influence de δl_r sur $\delta\vec{F}$

est faible lorsque $\sigma\tau \gg 1$ nous adopterons

$$\frac{\delta l_r}{l_r} = \frac{\delta \mathrm{H}_p}{\mathrm{H}_p} \tag{54}$$

quelle que soit la valeur de $\sigma\tau$. Ce choix permet de retrouver pour $\sigma\tau \ll 1$ des expressions identiques à celles obtenues en perturbant la solution sationnaire.

V. Expression des perturbations en coordonnées sphériques

Pour les oscillations non radiales, on a (Ledoux et Walraven, 1958)

$$\frac{\delta p}{p} = \frac{\delta p}{p}(r)\mathrm{Y}_l^m, \quad \frac{\delta \rho}{p} = \frac{\delta \rho}{\rho}(r)\mathrm{Y}_l^m$$

$$\delta r^r = \delta r(r)\mathrm{Y}_l^m$$

$$\delta r^\theta = \frac{\chi(r)}{\sigma^2 r^2}\frac{\partial \mathrm{Y}_l^m}{\partial \theta} \tag{56}$$

$$\delta r^\varphi = \frac{\chi(r)}{\sigma^2 r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial \mathrm{Y}_l^m}{\partial \varphi}$$

avec

$$\chi(r) \equiv \phi'(r) + \frac{p'(r)}{\rho}$$

où Y_l^m représente la fonction sphérique et $\phi'(r)$ désigne la perturbation eulérienne du potentiel gravifique.

On vérifie aisément à partir des équations (48) à (51) qu'il en résulte que

$$\delta\Delta \mathrm{S} = \delta\Delta \mathrm{S}(r)\mathrm{Y}_l^m$$

$$\delta \mathrm{V}^r = \delta \mathrm{V}^r(r)\mathrm{Y}_l^m \qquad \delta \mathrm{F}_c^r = \delta \mathrm{F}_c^r \mathrm{Y}_l^m$$

$$\delta \mathrm{V}^\theta = \frac{\delta \mathrm{V}_\theta(r)}{r^2}\frac{\partial \mathrm{Y}_l^m}{\partial \theta} \qquad \delta \mathrm{F}_c^\theta = \frac{\delta \mathrm{F}_\theta(r)}{r^2}\frac{\partial \mathrm{Y}_l^m}{\partial \theta}$$

$$\delta \mathrm{V}^\varphi = \frac{\delta \mathrm{V}_\theta(r)}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial \mathrm{Y}_l^m}{\partial \varphi} \qquad \delta \mathrm{F}_c^\varphi = \frac{\delta \mathrm{F}_\theta(r)}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial \mathrm{Y}_l^m}{\partial \varphi} \tag{57}$$

$\delta\Delta S(r)$, $\delta V^r(r)$ et δF^r sont alors obtenus immédiatement à partir des éqs. (50) et (48) (45) et (52) dans lesquelles on ne retient que la dépendance vis-à-vis de r et en tenant compte de

$$\frac{\delta\left(\dfrac{d\bar{S}}{dr}\right)}{\dfrac{d\bar{S}}{dr}} = \frac{d\dfrac{\delta\bar{S}}{dr}}{\dfrac{d\bar{S}}{dr}} - \frac{d\delta r}{dr} \tag{58}$$

$$\frac{\delta\left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp}{dr}\right)}{\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp}{dr}} = \frac{\dfrac{d\delta p}{dr}}{\dfrac{dp}{dr}} - \frac{d\delta r}{dr} - \frac{\delta\rho}{\rho} \tag{59}$$

$\delta V_\theta(r)$ et $\delta F_\theta(r)$ peuvent s'obtenir à partir des éqs. (49), (51), (45) et (52) en remarquant qu'il résulte de (56) que

$$\frac{\delta\dfrac{\nabla^\theta p}{\rho}}{\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp}{dr}} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial Y_l^m}{\partial\theta}\left[\frac{\delta p}{p}\left(\frac{d\ln\rho}{dr}\right)^{-1} - \left(\delta r - \frac{\chi}{\sigma^2 r}\right)\right]$$

$$\frac{\delta\dfrac{\nabla^\varphi p}{\rho}}{\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp}{dr}} = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial Y_l^m}{\partial\varphi}\left[\frac{\delta p}{p}\left(\frac{d\ln\rho}{dr}\right)^{-1} - \left(\delta r - \frac{\chi}{\sigma^2 r}\right)\right] \tag{60}$$

$$\frac{\delta\nabla^\theta\bar{S}}{\dfrac{dS}{dr}} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial Y_l^m}{\partial\theta}\left[\frac{\delta\bar{S}}{\bar{S}}\left(\frac{d\ln S}{dr}\right)^{-1} - \left(\delta r - \frac{\chi}{\sigma^2 r}\right)\right]$$

$$\frac{\delta\nabla^\varphi\bar{S}}{\dfrac{dS}{dr}} = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial Y_l^m}{\partial\varphi}\left[\frac{\delta\bar{S}}{\bar{S}}\left(\frac{d\ln S}{dr}\right)^{-1} - \left(\delta r - \frac{\chi}{\sigma^2 r}\right)\right] \tag{61}$$

$$\nabla_r\delta r^\theta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial Y_l^m}{\partial\theta}\frac{r}{\sigma^2}\frac{d\chi/r}{dr}$$

$$\nabla_r\delta r^\varphi = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial Y_l^m}{\partial\varphi}\frac{r}{\sigma^2}\frac{d\chi/r}{dr}$$

$$\nabla^{\theta}\delta r^{r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial Y_l^m}{\partial\theta}\left(\delta r - \frac{\chi}{\sigma^2 r}\right)$$

$$\nabla^{\varphi}\partial r^{r} = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial Y_l^m}{\partial\varphi}\left(\delta r - \frac{\chi}{\sigma^2 r}\right) \tag{62}$$

VI. Coefficient de stabilité vibrationnelle

Si l'amortissement est tel que

$$\delta r \quad \alpha \quad e^{-\sigma' t}$$

le coefficient de stabilité vibrationnelle σ' exprimé en fonction de la solution du problème adiabatique s'écrit (voir par exemple Ledoux et Walraven 1958)

$$\sigma' = -\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\int_0^M \frac{\delta T}{T}\delta\left[\varepsilon - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right]dm + \int_0^M \frac{\delta\rho}{\rho}\left(\Gamma_3 - \frac{5}{3}\right)\delta\left[\overline{\varepsilon_2} + \frac{1}{\rho}\overline{\vec{V}\cdot\vec{\nabla}p}\right]dm}{\int_0^M \delta\vec{r}\cdot\delta\vec{r}\,dm} \tag{63}$$

ou en tenant compte de l'équation de conservation de l'énergie cinétique de turbulence

$$\frac{1}{2}\frac{d\overline{V^2}}{dt} - \frac{1}{3}\frac{\overline{V^2}}{\bar{\rho}}\frac{d\bar{\rho}}{dt} = -\frac{\alpha\overline{V^2}}{\tau} - \frac{1}{\rho}\overline{\vec{V}\cdot\vec{\nabla}p} \tag{64}$$

et de

$$\overline{\varepsilon_2} = \frac{\alpha}{\tau}\overline{V^2}$$

ainsi que de (53)

$$\sigma' = -\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\int_0^M \frac{\delta T}{T}\delta\left[\varepsilon - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right]dm + \int_0^M \frac{\delta\rho}{\rho}\left(\Gamma_3 - \frac{5}{3}\right)\overline{\varepsilon_2}\frac{\sigma\tau}{\alpha}I\left(\frac{\partial V^r}{V^r}\right)dm}{\int_0^M \delta\vec{r}\cdot\delta\vec{r}\,dm} \tag{65}$$

Les expressions (63) et (64) sont mieux appropriées pour l'interprétation des résultats que la forme correspondante explicitée en terme des perturbations eulériennes.

Ledoux (1969) a explicité l'éq. (64) pour une étoile entièrement radiative. Nous allons généraliser cette expression pour inclure la contribution du flux convectif.

Les perturbations des composantes du flux radiatif s'écrivent

$$\delta F_R^r = \delta F_R^r(r) Y_l^m$$

$$\delta F_R^\theta = \frac{\delta F_{R\theta}(r)}{r^2} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} \qquad \delta F_R^\varphi = \frac{\delta F_{R\theta}(r)}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \varphi} \tag{66}$$

où

$$\frac{\delta F_R^r(r)}{F_R^r} = \left[4 - \left(\frac{\partial \ln \varkappa}{\partial \ln T}\right)_\rho\right] \frac{\delta T}{T} - \left[1 + \left(\frac{\partial \ln \varkappa}{\partial \ln \rho}\right)_T\right] \frac{\delta \rho}{\rho} + \frac{d\left(\frac{\delta T}{T}\right)}{d \ln T} - \frac{d\delta r}{dr}$$

$$\frac{\delta F_{R\theta}(r)}{F_R^r} = \frac{\delta T}{T}\left(\frac{d \ln T}{dr}\right)^{-1} - \delta r + \frac{\chi}{\sigma^2 r} \tag{67}$$

En tenant compte de l'équation différentielle des harmoniques sphériques, on obtient

$$\rho \delta\left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) = -\frac{\delta \rho}{\rho} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(r^2 F^r) + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(r^2 \delta F^r) - \frac{dF}{dr} \frac{d\delta r}{dr}$$

$$-\frac{F}{r}\left[2 \frac{\delta r}{r} - l(l+1) \frac{\chi}{\sigma^2 r^2}\right] - l(l+1) \frac{\delta F_\theta}{r^2} \tag{68}$$

où

$$\delta F^r = F_R \frac{\delta F_R^r(r)}{F_R} + F_c \frac{\delta F_c^r(r)}{F_c}$$

$$\delta F_\theta = F_R \frac{\delta F_{R\theta}(r)}{F_R} + F_c \frac{\delta F_{c\theta}(r)}{F_c} \tag{69}$$

En introduisant δL^r défini par

$$\frac{\delta L^r}{L} = 2 \frac{\delta r}{r} + \frac{\delta F^r}{F^r} + l(l+1) \frac{\chi}{\sigma^2 r^2} \tag{70}$$

et en tenant compte de l'équation de continuité

$$\frac{\delta \rho}{\rho}+\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\delta r)-\frac{\chi}{\sigma^2 r^2}l(l+1)=0$$

et de la composante radiale de l'équation de mouvement

$$\frac{d\chi}{dr}=\sigma^2\delta r-\mathrm{A}\frac{\delta p}{\rho}$$

où

$$\mathrm{A}=\frac{d\ln\rho}{dr}-\frac{1}{\Gamma_1}\frac{d\ln p}{dr}$$

l'équation (68) peut finalement s'écrire

$$\delta\left(\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{F}}\right) \tag{71}$$

$$=\frac{d\delta \mathrm{L}^r}{dm}-\frac{l(l+1)}{r^2}\left[\frac{\delta \mathrm{F}_\theta}{\rho}+\frac{2\chi}{\sigma^2}\frac{d\mathrm{L}}{dm}+\frac{\mathrm{F}}{\sigma^2\rho}\left(\sigma^2\delta r-\mathrm{A}\frac{\delta p}{\rho}-3\frac{\chi}{r}\right)\right]$$

Cette forme de la perturbation du flux est quelque peu différente de celle donnée par Ledoux bien qu'elle lui soit équivalente dans une couche radiative. Sous cette forme l'expression (71) fait apparaître le mécanisme d'instabilité mis en évidence par Souffrin et Spiegel (1967) à l'aide d'une étude locale. Il correspond au terme

$$\frac{l(l+1)}{r^2}\frac{\mathrm{F}}{\sigma^2\rho}\mathrm{A}\frac{\delta p}{\rho}$$

dont la contribution à σ' est positive dans une zone radiative ($\mathrm{A} < 0$) et négative et déstabilisante dans une zone convective ($\mathrm{A} > 0$).

VIII. Comparaison avec les travaux antérieurs

La comparaison ne peut être effectuée que pour le cas particulier des oscillations radiales, le cas général n'ayant pas fait jusqu'à ce jour l'objet de travaux publiés.

Comme notre théorie et celle de Cox imposent toutes deux que, pour $\sigma\tau \ll 1$, les résultats obtenus soient identiques à ceux déduits en perturbant la solution stationnaire, les deux théories donnent les mêmes résultats dans cette limite. Toutefois pour $\sigma\tau \gg 1$ les résultats diffèrent fortement puisque Cox impose que $\lim_{\sigma\tau\to\infty} \delta F_c^r = 0$. Cette condition nous paraîtrait plus justifiable si elle ne portait que sur

$$\delta\left(\frac{F_c^2}{\rho T}\right) = \delta(\overline{\Delta S \vec{V}})$$

Dans la limite $\sigma\tau \gg 1$ les théories de Cox et de Boury *et al.* donneraient alors essentiellement les mêmes résultats. Dans ce cas limite l'approche intuitive de Boury *et al.* et celle développée ici diffèrent par deux points. Nous obtenons ici $\delta\Delta S = 0$ et non

$$\frac{\delta\left(\frac{\Delta T}{T}\right)}{\frac{\Delta T}{T}} = \frac{\delta\Delta S}{\Delta S} - \frac{\delta C_p}{C_p} = 0$$

Dans la plupart des situations $\frac{\delta C_p}{C_p}$ sera toutefois faible. Par ailleurs, nous obtenons

$$\frac{\delta V^r}{V^r} = \frac{1}{3}\frac{\delta\rho}{\rho} \text{ et non } \frac{\delta V^r}{V^r} = 0.$$

Cette différence est due à la présence dans l'équation de mouvement (11) du terme $\sum_i \rho V^i \nabla_i u^j$. Il correspond au terme

$$\frac{1}{3}\frac{\overline{V^2}}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$$

dans l'équation (64) dont la forme perturbée est

$$i\sigma\tau\left(\frac{\delta|\overline{V}|}{|\overline{V}|} - \frac{1}{3}\frac{\delta\bar{\rho}}{\bar{\rho}}\right) = \frac{\delta\overline{\varepsilon_2}}{\overline{\varepsilon_2}} - \frac{\delta\left(\frac{1}{\rho}\overline{\vec{V}\cdot\vec{\nabla}p}\right)}{\frac{1}{\rho}\overline{\vec{V}\cdot\vec{\nabla}p}} \qquad (72)$$

Cette équation montre que pour $\sigma\tau \gg 1$ la variation d'énergie cinétique de turbulence est due uniquement au travail de dilatation nécessaire pour vaincre la pression de turbulence $p_t = \frac{1}{3}\overline{\rho V^2}$. Cet effet avait été négligé jusqu'à présent. D'autre part, pour la limite

$\sigma\tau \ll 1$ Boury *et al.* obtiennent des résultats très différents de toutes les autres approches du fait qu'ils ont supposé que les perturbations de la convection restent toujours adiabatiques ce qui n'est pas du tout le cas lorsque $\sigma\tau \ll 1$ comme le montre l'éq. (72).

Nos résultats sont par contre fort proches de ceux de Unno. Ils s'en écartent toutefois sur deux points. Unno a négligé le terme $\sum_i V^i \nabla_i u^j$ dans l'équation de mouvement. Dans l'équation de conservation de l'énergie, il a supposé

$$\Delta C_p = 0 \text{ et } \Delta\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = 0$$

La première différence n'a en général qu'une faible influence sauf peut-être dans les zones d'ionisation de l'hydrogène et de l'hélium. La seconde conduit à une différence plus marquée lorsque la convection ne s'adapte pas; nous obtenons

$$\delta\left(C_p \frac{\Delta T}{T}\right) = 0$$

alors que Unno donne $\delta \Delta T = 0$.

En ce qui concerne plus particulièrement l'influence de la dissipation d'énergie mécanique de turbulence, représentée par la 2^e^ intégrale du numérateur des équations (63) et (65), la comparaison n'est possible qu'avec Boury *et al.*, les autres travaux ayant ignoré cet effet. A nouveau nous constatons que pour $\sigma\tau \gg 1$ l'accord est bon, les deux résultats ne différant que par un terme en $\frac{\delta(C_p Q)}{C_p Q}$ souvent faible. Par contre dans le cas limite où $\sigma\tau \ll 1$ nous trouvons que

$$\delta\left[\varepsilon_2 - \frac{1}{\bar{\rho}} \overline{\vec{V} \cdot \vec{\nabla} p}\right] = 0$$

Ceci est dû au fait que, lorsque le temps de relaxation de la convection est beaucoup plus court que la période de l'oscillation, la turbulence reste dans un état quasi-stationnaire où l'énergie cinétique de turbulence produite sous l'action de la force d'Archimède est presque totalement compensée par les pertes de chaleur dues à la viscosité.

REFERENCES

Boury, A., Gabriel, M. et Ledoux, P. *Ann. d'Astroph.* **27**, 92, 1964.

Cox, J. P., Cox, A. N., Olsen, K. H., King, D. S., Eilers, D. D., *Ap. J.* **144**, 1038, 1966.

Henyey, L., Vardya, M. S. and Bodenheimer, P., *Ap. J.*, **142**, 841, 1965.

Ledoux, P. *Oscillations et Stabilité Stellaire* dans La Structure interne des étoiles, XI^e cours de perfectionnement de l'association Vaudoise des chercheurs en physique, Saas-Fee, 24-29 mars 1969.

Ledoux, P., Walraven, Th. *Hdb. der Phys.*, **51**, 353, 1958.

Souffrin, P. et Spiegel, E. A. *Ann. d'Astroph.*, **30**, 985, 1967.

Unno, W., *Publ. Astr. Soc. Japan,* **19**, 140, 1967.