

MODÈLES HYDROSTATIQUES D'ÉTOILES SUPERMASSIVES DE 10^5 À 10^6 MASSES SOLAIRES

par R. SCUFLAIRE
*Institut d'Astrophysique
de l'Université de Liège*

SUMMARY

Models of supermassive stars on the main sequence have been computed and results are presented for masses in the range from 10^5 to 10^6 solar masses. The structure of these models can be understood with the help of a polytropic model of index $n = 3$.

I. INTRODUCTION

L'existence d'étoiles supermassives de masses comprises entre 10^5 et 10^8 masses solaires (M_{\odot}) a été invoquée par Hoyle et Fowler [1] pour expliquer le rayonnement des radiosources intenses. La combustion de l'hydrogène dans une étoile de $10^8 M_{\odot}$ pourrait rendre compte des luminosités élevées de l'ordre de 10^{45} à 10^{46} erg s^{-1} observées dans les sources les plus intenses [2]. La découverte des quasars et l'interprétation du décalage de leurs spectres vers le rouge en termes d'une récession d'origine cosmologique [3], [4], [5] consolida le point de vue de Hoyle et Fowler. D'autres hypothèses ont été avancées pour expliquer la nature des quasars (voir l'article de revue de Demaret [6] sur ce sujet). Elles peuvent être réparties en deux classes. Les unes sont des variantes de l'hypothèse de l'étoile supermassive, les autres interprètent le quasar comme un ensemble d'objets plus ou moins indépendants (supernovae, par exemple). Notons que l'étude statistique des variations de luminosité semble indiquer qu'elles doivent être attribuées à un objet unique [7], [8].

Nous n'évoquerons pas ici les difficultés liées à la formation des étoiles supermassives. L'existence même de ces objets pose des problèmes. En l'absence de rotation et de champ magnétique, les modèles hydrostatiques sont dynamiquement instables vis-à-vis de petites perturbations radiales lorsque leurs masses excèdent une masse critique de l'ordre de $5.10^5 M_{\odot}$. Le rôle de cette instabilité sur l'évolution de l'étoile n'est pas très clair. Certains auteurs [9] pensent qu'elle entraîne l'effondrement gravitationnel de l'étoile, alors que selon d'autres [10], [11], [12] il existerait un domaine intermédiaire de masses où les réactions nucléaires seraient capables de renverser le sens de l'effondrement initial et conduiraient à l'explosion de l'étoile.

Jusqu'à présent la stabilité de ces objets vis-à-vis de petites perturbations radiales a été traitée par des méthodes ou des critères approximatifs. En vue d'une étude exacte des petites perturbations radiales des étoiles supermassives au voisinage de la masse critique, nous avons construit des modèles de séquence principale à symétrie sphérique (sans rotation ni champ magnétique) de masses comprises entre 10^5 et $10^6 M_{\odot}$. Leur description constitue l'objet du présent article.

Présenté par P. Ledoux, le 19 septembre 1975.

2. ÉQUATIONS DE STRUCTURE

Nous avons écrit l'équation d'équilibre hydrostatique dans le formalisme de la relativité générale. Adoptons la métrique de Schwarzschild

$$ds^2 = e^{\nu} c^2 dt^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - e^{\lambda} dr^2 \quad (2.1)$$

et définissons la variable m par

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2Gm}{rc^2} \quad (2.2)$$

Les équations du champ se réduisent alors à une forme proche des équations non relativistes de définition de la masse et d'équilibre hydrostatique. Demaret [13] donne le détail du calcul permettant d'écrire les équations suivantes

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \frac{\varepsilon}{c^2} \quad (2.3)$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm}{r^2} \frac{P + \varepsilon}{c^2} \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right)^{-1} \left(1 + \frac{4\pi r^3 P}{mc^2}\right) \quad (2.4)$$

ε est la densité d'énergie (y compris l'énergie de masse)

$$\varepsilon = \rho c^2 + \rho U \quad (2.5)$$

où U est l'énergie interne par unité de masse.

On peut montrer que mc^2 est l'énergie totale (incluant l'énergie de masse, l'énergie interne et l'énergie potentielle gravifique) contenue dans la sphère de rayon r . La valeur M de m à la surface de l'étoile détermine le champ gravifique non relativiste à grande distance de l'étoile et est souvent appelée masse gravitationnelle ou masse observable de l'étoile. A la limite classique, m est la masse contenue dans la sphère de rayon r . L'équation (2.4) est connue sous le nom d'équation d'Oppenheimer-Volkoff [14]. On a également l'équation

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{1}{2} (P + \varepsilon) \frac{d\nu}{dr} \quad (2.6)$$

qui lie ν aux variables précédentes.

Dans les modèles considérés ici, les effets de relativité sont faibles. Étant donné les incertitudes sur les taux de réaction thermonucléaire, nous avons gardé la forme non relativiste des équations d'équilibre thermique et de transfert.

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho \varepsilon_N \quad (2.7)$$

où ε_N est le taux de génération d'énergie nucléaire par gramme et par seconde.

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa\rho L}{16\pi r^2 acT^3} \quad (\text{zone radiative}) \quad (2.8)$$

$$\frac{dT}{dr} = \left(\frac{dT}{dr}\right)_c \quad (\text{zone convective}) \quad (2.9)$$

Le second membre de l'équation (2.9) est calculé par la théorie usuelle de la convection [15], [16] où nous avons adopté une longueur de mélange égale à l'échelle de hauteur de la pression.

La régularité des variables physiques au centre exige qu'on y impose

$$m = 0 \quad (2.10)$$

$$L = 0 \quad (2.11)$$

A la surface, nous avons fait l'approximation d'Eddington et imposé l'équilibre hydrostatique des couches extérieures. Si τ désigne la profondeur optique à laquelle se situe le dernier point du modèle, nous avons donc en ce point les deux conditions

$$T^4 = \frac{3L}{4\pi r^2 ac} \left(\tau + \frac{2}{3} \right) \quad (2.12)$$

$$P = \frac{GM}{\kappa r^2} \left(\tau + \frac{2}{3} \frac{\kappa L}{4\pi c GM} \right) \quad (2.13)$$

On remarquera que dans les étoiles ordinaires, le terme $\frac{\kappa L}{4\pi c GM}$ dans l'équation (2.13) est généralement négligeable. Dans les étoiles supermassives, du fait de l'importance de la pression de rayonnement, ce terme est voisin de l'unité.

3. PROPRIÉTÉS PHYSIQUES DE LA MATIÈRE

Dans nos modèles, la densité est faible et la température élevée. La matière est complètement ionisée. Son équation d'état est celle d'un mélange de gaz parfait monoatomique et de rayonnement

$$P = \frac{\mathcal{R}\rho T}{\mu} + \frac{1}{3} aT^4 \quad (3.1)$$

Le premier terme est la pression gazeuse P_g et le second la pression de rayonnement P_R . On désigne habituellement par β le rapport P_g/P . Dans les étoiles supermassives la pression de rayonnement domine nettement la pression gazeuse

$$\beta \ll 1 \quad (3.2)$$

Les coefficients thermodynamiques ont des expressions simples. Rappelons seulement la forme du coefficient adiabatique Γ_1

$$\Gamma_1 = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_s = \beta + \frac{2}{3} \frac{(4 - 3\beta)^2}{8 - 7\beta} = \frac{4}{3} + \frac{1}{6} \beta + o(\beta^2) \quad (3.3)$$

L'opacité est due essentiellement à la diffusion électronique

$$\kappa = 0,2 (1 + X) \quad (3.4)$$

où X est la fraction en masse de l'hydrogène.

Aux hautes températures régnant dans les régions centrales, c'est le cycle du carbone qui assure la production d'énergie nucléaire et la conversion d'hydrogène en hélium. La chaîne proton-proton est environ un million de fois moins efficace. Au voisinage de $5,5 \cdot 10^7$ °K, température caractéristique des zones centrales de nos modèles, le taux de génération d'énergie nucléaire par gramme et par seconde est donné approximativement par

$$\varepsilon_N = 1,456 \cdot 10^{-13} \rho X X_{CNO} T_6^{12,7} \quad (3.5)$$

où X_{CNO} est l'abondance en masse de carbone, d'azote et d'oxygène et T_6 la température exprimée en millions de degrés Kelvin.

4. LA MÉTHODE DE CALCUL

Nous avons résolu numériquement le problème différentiel aux conditions aux limites décrit au § 2 en employant une méthode de fitting décrite par Sears et Brownlee [18]. La méthode est délicate à appliquer à ce genre d'étoile où la balance hydrostatique est difficile à satisfaire dans les couches extérieures (du fait que $\beta \ll 1$). Les intégrations numériques sont très sensibles aux conditions initiales et aux erreurs de troncature, ce qui rend le processus de raccord très délicat. L'adoption d'une méthode de Runge-Kutta à pas variable a permis un certain contrôle de l'erreur. D'autre part nous avons choisi $\ln \rho$ comme variable dépendante au lieu de P . En effet si on choisit P et T comme variables thermodynamiques, ρ est calculé à partir de P_G obtenu par différence entre deux termes voisins P et P_R . Dans ces conditions l'erreur sur ρ est grande et la méthode de fitting ne converge pas. Le choix du logarithme est imposé par la décroissance exponentielle de ρ dans les couches extérieures avec une échelle de hauteur faible vis-à-vis du rayon (de l'ordre du millième). Moyennant ces précautions nous avons pu satisfaire les conditions de raccord à mieux que 10^{-4} en valeur relative.

5. LES MODÈLES

Nous avons adopté arbitrairement une composition chimique de population I caractérisée par les abondances en masse d'hydrogène, d'hélium et d'éléments lourds suivantes (« Iben mixture XVII » de [19])

$$X = 0,80 \quad (5.1)$$

$$Y = 0,18 \quad (5.2)$$

$$Z = 0,02 \quad (5.3)$$

L'abondance des éléments du groupe CNO est de

$$X_{\text{CNO}} = 0,012 \quad (5.4)$$

Les modèles calculés se composent d'un noyau convectif qui s'étend jusqu'aux 9/10 du rayon et d'une enveloppe radiative contenant une très faible fraction de la masse ($2 \cdot 10^{-4}$). Le tableau 5.1 donne les valeurs de quelques paramètres caractéristiques des modèles.

TABLEAU 5.1

Valeurs de quelques paramètres caractéristiques des modèles

$10^{-5}M/M_{\odot}$	ρ (g cm ⁻³)	T_c (°K)	β_c	R (cm)	L (erg s ⁻¹)	T_e (°K)	E (erg)	$\frac{2 GM}{Rc^2}$
1	7,25 (— 2)	5,59 (7)	2,33 (— 2)	3,21 (13)	1,35 (43)	6,55 (4)	— 1,20 (54)	9,17 (— 4)
2	5,46 (— 2)	5,72 (7)	1,65 (— 2)	4,48 (13)	2,72 (43)	6,61 (4)	— 2,04 (54)	1,32 (— 3)
3	4,63 (— 2)	5,79 (7)	1,35 (— 2)	5,44 (13)	4,10 (43)	6,64 (4)	— 2,47 (54)	1,63 (— 3)
4	4,12 (— 2)	5,85 (7)	1,17 (— 2)	6,24 (13)	5,48 (43)	6,67 (4)	— 2,46 (54)	1,89 (— 3)
5	3,76 (— 2)	5,89 (7)	1,05 (— 2)	6,94 (13)	6,86 (43)	6,69 (4)	— 2,02 (54)	2,13 (— 3)
7	3,28 (— 2)	5,96 (7)	8,84 (— 3)	8,14 (13)	9,63 (43)	6,72 (4)	0,23 (54)	2,53 (— 3)
10	2,83 (— 2)	6,03 (7)	7,39 (— 3)	9,66 (13)	1,38 (44)	6,75 (4)	7,06 (54)	3,05 (— 3)

ρ_c , T_c et β_c désignent les valeurs centrales de la densité, de la température et du rapport de la pression gazeuse à la pression totale respectivement. R est le rayon de l'étoile à la photosphère, L sa luminosité et T_e sa température effective. Ces grandeurs peuvent être exprimées en fonction de la masse par les relations suivantes (obtenues par la méthode des moindres carrés)

$$\lg \rho_c = -0,4078 \lg M + 0,8987 \quad (5.5)$$

$$\lg T_c = 0,03288 \lg M + 7,5828 \quad (5.6)$$

$$\lg \beta_c = -0,4994 \lg M + 0,8656 \quad (5.7)$$

$$\lg R = 0,4778 \lg M + 11,1185 \quad (5.8)$$

$$\lg L = 1,0083 \lg M + 38,0899 \quad (5.9)$$

$$\lg T_e = 0,01320 \lg M + 4,7500 \quad (5.10)$$

Les logarithmes sont décimaux et les grandeurs physiques sont exprimées en unités CGS, sauf la masse qui est exprimée en masses solaires et les températures en degrés Kelvin.

E est l'énergie de l'étoile (incluant l'énergie potentielle et l'énergie interne) si le zéro d'énergie potentielle correspond à un état où l'étoile est complètement dispersée.

E est défini par

$$E = Mc^2 - M_0c^2 \quad (5.11)$$

où M_0 est la masse propre de l'étoile. On remarquera que $E > 0$ lorsque M est supérieur à environ $7.10^5 M_\odot$. Cela indique une instabilité dynamique. Celle-ci peut néanmoins se produire pour des valeurs plus faibles de la masse.

Le paramètre $\frac{2GM}{Rc^2}$ donne l'importance des effets relativistes. Ils sont faibles dans tout le domaine de masses considéré. Les écarts des coefficients de la métrique par rapport à une métrique euclidienne ne dépassent pas quelques pourcents. Nous avons évalué l'effet des termes relativistes sur la structure en recalculant quelques modèles classiquement. Les écarts ainsi obtenus pour quelques paramètres caractéristiques de l'étoile sont donnés au tableau 5.2 pour quelques valeurs de la masse.

TABLEAU 5.2

Écarts obtenus en négligeant les effets relativistes

$10^{-5} M/M_\odot$	$\Delta\rho_c/\rho_c$	$\Delta T_c/T_c$	$\Delta R/R$	$\Delta L/L$
1	1,6 (— 3)	— 2,4 (— 4)	— 2,1 (— 3)	— 1,1 (— 3)
2	2,3 (— 3)	— 3,6 (— 4)	— 3,2 (— 3)	— 1,5 (— 3)
5	3,8 (— 3)	— 5,3 (— 4)	— 5,6 (— 3)	— 2,4 (— 3)
10	5,4 (— 3)	— 7,9 (— 4)	— 9,4 (— 3)	— 3,5 (— 3)

6. DISCUSSION

Dans le noyau la convection est très efficace et le gradient de température y est proche du gradient adiabatique. On a donc avec une bonne approximation

$$\frac{d \ln P}{d \ln \rho} = \Gamma_1 \quad (6.1)$$

Il résulte de (3.2) et (3.3) que Γ_1 est proche de $4/3$, on a donc approximativement

$$\frac{d \ln P}{d \ln \rho} = \frac{4}{3} \quad (6.2)$$

D'autre part, ainsi que nous l'avons vu au § 5, les corrections de relativité sont faibles. Le noyau (donc la quasi-totalité de la masse de l'étoile) a ainsi une structure proche de celle d'un polytrophe classique d'indice 3. Le paramètre arbitraire qui intervient dans toute structure polytropicque peut être déterminé si on impose une relation indépendante de l'hypothèse polytropicque. Dans le cas des étoiles supermassives on obtient cette relation de la façon suivante. A la base de l'enveloppe radiative le critère de Schwarzschild exprimant la stabilité vis-à-vis de la convection est juste satisfait. Négligeant des termes de l'ordre de β devant l'unité, il vient

$$L = \frac{4\pi cGM}{\kappa} \quad (6.3)$$

On peut également exprimer L comme étant l'énergie libérée par les réactions nucléaires dans toute la masse de l'étoile

$$L = \int_0^M \varepsilon_N dm \quad (6.4)$$

En égalant les seconds membres de (6.3) et (6.4) on obtient la relation qui permet de déterminer le paramètre arbitraire du modèle polytropicque. Le calcul montre que dans le noyau, les écarts entre le modèle polytropicque et le modèle calculé correctement sont inférieurs à 1 %. Appenzeller et Fricke^[20] obtiennent des écarts similaires. Étant donné la faible masse contenue dans l'enveloppe radiative, le modèle polytropicque de Hoyle et Fowler^[1] constitue une bonne description des étoiles supermassives, au moins pour des masses inférieures à $10^6 M_\odot$.

RÉFÉRENCES

- [1] HOYLE, F., FOWLER, W. A., *Month. Not. Roy. Astron. Soc.*, **125**, 169 (1963).
- [2] MATTHEWS, T. A., MORGAN, W. W., SCHMIDT, M., *Astrophys. J.*, **140**, 35 (1964).
- [3] MATTHEWS, T. A., SANDAGE, A. R., *Astrophys. J.*, **138**, 30 (1963).
- [4] SCHMIDT, M., *Nature*, **197**, 1040 (1963).
- [5] GREENSTEIN, J. L., MATTHEWS, T. A., *Nature*, **197**, 1041 (1963).
- [6] DEMARET, J., *Revue des questions scientifiques*, **140**, 453, 1969, **141**, 73-257, 417-513 (1970).
- [7] GUDZENKO, L. I., OZERNOI, L. M., CHERTOPRUD, V. E., *Soviet Astron.*, **12**, 392 (1968).
- [8] GUDZENKO, L. I., OZERNOI, L. M., CHERTOPRUD, V. E., *Soviet Astron.*, **15**, 371 (1971).
- [9] OSAKI, Y., *Pub. Astron. Soc. Japan*, **18**, 384 (1966).
- [10] APPENZELLER, I., FRICKE, K., *Astron. Astrophys.*, **18**, 10 (1972).
- [11] APPENZELLER, I., FRICKE, K., *Astron. Astrophys.*, **21**, 285 (1972).
- [12] FRICKE, K., *Astrophys. J.*, **183**, 941 (1973).
- [13] DEMARET, J., *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, **38**, 219 (1969).
- [14] OPPENHEIMER, J. R., VOLKOFF, G. M., *Phys. Rev.*, **55**, 374 (1939).
- [15] VITENSE, E., *Zs. f. Astrophys.*, **32**, 135 (1953).
- [16] BÖHM-VITENSE, E., *Zs. f. Astrophys.*, **46**, 108 (1958).
- [17] REEVES, H., dans *Stars and Stellar Systems*, **8**, *Stellar Structure*, p. 113, Ed. Aller, Mc Laughlin, University of Chicago Press (1965).
- [18] SEARS, R. L., BROWNLEE, R. R., dans *Stars and Stellar Systems*, **8**, *Stellar Structure*, p. 575, Ed. Aller, Mc Laughlin, University of Chicago Press (1965).
- [19] COX, A. N., STEWART, J. N., *Astrophys. J. Suppl.*, **19**, 243 (1970).
- [20] APPENZELLER, I., FRICKE, K., *Astron. Astrophys.*, **12**, 488 (1971).