

Diplôme d'Études Approfondies  
en Astrophysique, Géophysique et Physique Spatiale

# **STABILITÉ STELLAIRE**

**R. Scuflaire**

Institut d'Astrophysique et de Géophysique  
Université de Liège

Août 2006



# Avertissement

Le cours de *Stabilité stellaire* s'inscrit dans le groupe *Étoiles* des cours organisés à l'Institut d'Astrophysique et de Géophysique de l'Université de Liège dans le cadre du D.E.A. en Astrophysique, Géophysique et Physique Spatiale. Les présentes notes constituent le support du cours dispensé oralement et n'ont pas la prétention de couvrir le sujet de façon exhaustive et n'incluent pas les exercices des répétitions. Il est recommandé aux étudiants intéressés par la stabilité stellaire de suivre également le cours d'*Évolution des étoiles*. Les connaissances acquises en stabilité sont indispensables à l'étude de l'*Astérosismologie*. Enfin, le cours sur les *Étoiles variables* constitue un complément fort utile.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Temps caractéristiques</b>	<b>5</b>
2.1	Le temps dynamique . . . . .	5
2.2	Le temps de pulsation . . . . .	6
2.3	Le temps d’Helmholtz-Kelvin . . . . .	8
2.4	Le temps nucléaire . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Équations générales</b>	<b>11</b>
3.1	Équation de continuité . . . . .	12
3.2	Équation de mouvement . . . . .	12
3.3	Équation de Poisson . . . . .	13
3.4	Équation de conservation de l’énergie . . . . .	13
3.5	Équation de transfert . . . . .	13
3.6	Conditions aux limites . . . . .	13
3.7	Équations d’état . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Configuration d’équilibre</b>	<b>15</b>
<b>5</b>	<b>Méthode des petites perturbations</b>	<b>17</b>
5.1	Perturbations lagrangiennes et eulériennes . . . . .	18
5.2	Perturbation des équations différentielles . . . . .	19
5.3	Perturbation des équations d’état . . . . .	20
<b>6</b>	<b>Perturbations adiabatiques</b>	<b>23</b>
<b>7</b>	<b>Oscillations radiales</b>	<b>27</b>
7.1	Équations différentielles . . . . .	27
7.2	Expressions intégrales . . . . .	29
7.3	Modes dynamiques et modes séculaires . . . . .	31

<b>8</b>	<b>Oscillations radiales adiabatiques</b>	<b>33</b>
8.1	Énergie d'un mode . . . . .	36
8.2	Comportement des fonctions propres . . . . .	38
8.3	Quelques cas d'instabilité . . . . .	40
<b>9</b>	<b>Expression asymptotique des fréquences radiales</b>	<b>43</b>
9.1	Singularité au centre . . . . .	44
9.2	Singularité à la surface . . . . .	44
9.3	Raccordement des deux solutions . . . . .	45
9.4	Bref rappel sur les fonctions de Bessel . . . . .	45
<b>10</b>	<b>Stabilité vibrationnelle</b>	<b>47</b>
10.1	L'approximation quasi-adiabatique . . . . .	48
10.2	L'excitation nucléaire . . . . .	50
10.3	L'influence du terme de transfert . . . . .	51
10.4	Les modes étranges . . . . .	52
<b>11</b>	<b>Le mécanisme de pulsation dans la bande d'instabilité et le retard de phase de la lumière</b>	<b>55</b>
11.1	Existence de l'instabilité . . . . .	55
11.2	Le retard de phase de la lumière . . . . .	59
<b>12</b>	<b>Stabilité séculaire</b>	<b>61</b>
12.1	Gaz parfait . . . . .	62
12.2	Matière dégénérée . . . . .	62
12.3	Application à l'évolution stellaire . . . . .	63
<b>13</b>	<b>Oscillations non radiales</b>	<b>69</b>
13.1	Coordonnées sphériques, rappel . . . . .	69
13.2	Équations aux perturbations . . . . .	70
13.3	L'approximation de Cowling . . . . .	74
<b>14</b>	<b>Modes non radiaux</b>	<b>77</b>
14.1	Orthogonalité des fonctions propres . . . . .	77
14.2	Composantes du déplacement . . . . .	77
14.3	Modes p, g et f . . . . .	78
14.4	Modes sphéroïdaux et modes toroïdaux . . . . .	83
14.5	Expression asymptotique des fréquences . . . . .	85

<b>15 Influence de la rotation</b>	<b>87</b>
15.1 Oscillations non radiales dans les étoiles variables . . . . .	89
<b>16 Sismologie solaire et stellaire</b>	<b>93</b>
16.1 Détermination de $\Omega(r)$ . . . . .	94
16.2 Détermination de la structure solaire . . . . .	96
16.3 Astérosismologie non adiabatique . . . . .	97
<b>17 Oscillations radiales non linéaires</b>	<b>99</b>
17.1 Développement en série . . . . .	100
17.2 Intégration numérique avec conditions initiales . . . . .	100
17.3 Pulsations régulières et chaotiques . . . . .	101





# Chapitre 1

## Introduction

Souvent lorsqu'on étudie un système physique, l'intérêt se porte d'abord sur ses configurations d'équilibre. Dans le cas des étoiles, une telle approche est certainement justifiée par une observation sommaire. Le cours *Évolution des étoiles* a familiarisé le lecteur avec ces structures d'équilibre et lui a appris qu'elles évoluent, la plupart du temps, très lentement sous l'effet de la modification de la composition chimique. Il importe ensuite de savoir si ces structures d'équilibre sont stables ou non. L'étude de la stabilité stellaire est donc le complément naturel de l'étude de la structure des étoiles.

Dans les cas où la structure d'équilibre est instable, on étudiera le développement de l'instabilité : temps nécessaire à son développement, forme sous laquelle elle se manifeste. Bien souvent cette instabilité se manifestera sous la forme d'une variabilité d'un type ou l'autre se déroulant à une échelle de temps considérablement plus courte que le temps caractéristique d'évolution. La proportion d'étoiles variables est faible. L'intérêt qu'on leur porte est néanmoins considérable. D'une part, le rôle joué par les variables des types RR Lyr et céphéides dans l'estimation des distances astronomiques est bien connu. D'autre part, l'étude des oscillations stellaires fournit des informations sur la structure interne qui ne sont pas directement accessibles à l'observation et permet ainsi de tester la théorie de l'évolution stellaire.

L'accroissement de la précision des instruments d'observation et de leur résolution temporelle permet d'observer un nombre croissant d'oscillations. C'est ainsi qu'actuellement, des milliers de modes de périodes voisines de 5 minutes (fréquences voisines de 3 mHz) ont été identifiés sur le Soleil et leurs fréquences mesurées avec une précision de l'ordre du  $\mu\text{Hz}$ . L'utilisation de ces données pour la détermination de la structure interne du Soleil constitue l'héliosismologie. La même technique appliquée aux autres étoiles constitue l'astérosismologie.

Nous considérerons seulement des étoiles gazeuses. Nous excluerons donc les cas où l'étoile ou une partie de celle-ci serait dans un état physique comparable à l'état solide (naines blanches sous certaines conditions, étoiles de neutrons). Nous nous placerons dans le cadre de la mécanique non relativiste et la théorie newtonienne de la gravitation, excluant de notre étude les cas où l'usage de la relativité est justifié (naines blanches très condensées, étoiles de neutrons, trous noirs, étoiles supermassives).

On sait qu'un système mécanique est stable si sa configuration d'équilibre correspond à

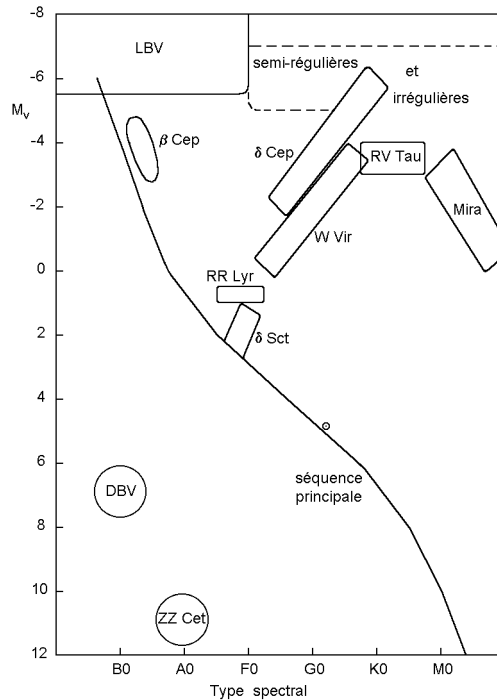


FIG. 1.1 – Diagramme HR montrant quelques types d'étoiles variables.

minimum du potentiel. Cette propriété peut être étendue à une configuration stellaire tant qu'on ne considère que des transformations adiabatiques. Si on veut prendre en considération les termes non adiabatiques, l'extension de la méthode n'est pas immédiate. Cette méthode de l'énergie a été peu utilisée et n'est pas abordée dans le cours. Au contraire, une grande partie de celui-ci est consacrée à la méthode des petites perturbations. Elle est assez aisée à mettre en oeuvre, les propriétés des solutions sont assez bien comprises et elle suffit pour expliquer une bonne part des phénomènes de variabilité liés à la stabilité stellaire. Toutefois, l'explication d'un certain nombre de phénomènes (amplitude des oscillations, chaos, ...) nécessite une théorie non linéaire qui est évoquée plus brièvement à la fin du cours.

Nous avons situé approximativement, dans un diagramme HR, quelques types d'étoiles variables dont il sera question dans ce cours (figure 1.1). On se reportera au cours *Étoiles variables* pour une description détaillée de ces différents types. Attirons l'attention sur le fait que les variables  $\delta$  Sct, RR lyr,  $\delta$  Cep et W Vir occupent dans le diagramme HR une région qu'on appelle *bande d'instabilité*.

## Références

Les textes de Ledoux et Walraven (1958), Ledoux (1969), Cox (1974), Cox (1980), Unno et al. (1989) constituent des références classiques sur le sujet. On trouvera un survol rapide et récent de la théorie dans les articles de Gautschy et Saio (1995 et 1996). La méthode de l'énergie est décrite dans l'article de Ledoux (1958).

- Cox J.P., 1974. Pulsating stars. *Rep Prog Phys*, 37, 563–698.
- Cox J.P., 1980. *Theory of stellar pulsation*. Princeton University Press.
- Gautschy A., Saio H., 1995. Stellar pulsations across the HR diagram : part 1. *Ann Rev Astron Astrophys*, 33, 75–113.
- Gautschy A., Saio H., 1996. Stellar pulsations across the HR diagram : part 2. *Ann Rev Astron Astrophys*, 34, 551–606.
- Ledoux P., 1958. Stellar stability. In *Handbuch der Phys*, vol 51, 605–688, edit. Flügge S., Springer.
- Ledoux P., 1969. Oscillations et stabilité stellaires. In *La structure interne des étoiles*, 11ème cours de perfectionnement de l'association vaudoise des chercheurs en physique, 45–211, edit. Joseph C., Janin G., Maeder A., Mayor M., Saas-Fee.
- Ledoux P., Walraven T., 1958. Variable stars. In *Handbuch der Phys*, vol 51, 353–604, edit. Flügge S., Springer.
- Unno W., Osaki Y., Ando H., Saio H., Shibahashi H., 1989. *Nonradial oscillations of stars*, 2nd edit. University of Tokyo press.



# Chapitre 2

## Temps caractéristiques

Les différents phénomènes physiques qui affectent une étoile s'y déroulent à des échelles de temps extrêmement différentes. Pour modéliser ces phénomènes et faire les approximations adéquates ou choisir correctement le pas d'intégration dans une approche numérique, il est important de connaître ces échelles de temps. Nous allons les estimer grossièrement.

### 2.1 Le temps dynamique

On sait que l'équilibre hydrostatique d'une étoile résulte de la compensation de la gravité par le gradient de pression. Si l'équilibre entre ces deux forces se trouvait rompu, l'étoile réagirait sur une échelle de temps qu'on qualifie de dynamique. Pour l'évaluer, imaginons que la force de pression cesse brusquement de s'exercer et d'équilibrer la force de gravité. Considérons un élément de matière de masse unitaire. Il serait soumis à la seule force de gravité et se trouverait en chute libre. Son mouvement serait régi par l'équation

$$\ddot{r} = -\frac{Gm}{r^2}.$$

En désignant par  $\tau_{chl}$  un temps caractéristique de cette chute libre et en introduisant dans l'équation précédente des estimations grossières, on écrira

$$\frac{R}{\tau_{chl}^2} \approx \frac{GM}{R^2},$$

ce qui donne

$$\tau_{chl} \approx \sqrt{R^3/GM}.$$

On peut également évaluer l'échelle de temps de réaction de l'étoile à une rupture de l'équilibre hydrostatique en imaginant cette fois que la force de gravité cesse brusquement de s'exercer. La force de pression s'exerçant seule produirait la dislocation de l'étoile. Un élément de matière serait alors accéléré vers l'extérieur conformément à l'équation

$$\ddot{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr}.$$

En désignant par  $\tau_{expl}$  un temps caractéristique de cette explosion, nous l'estimons grossièrement de la façon suivante

$$\frac{R}{\tau_{expl}^2} \approx \frac{P}{\rho R} \approx \frac{c^2}{R}.$$

où  $c = \sqrt{\Gamma_1 P / \rho}$  est une vitesse du son caractéristique de l'étoile. Il vient

$$\tau_{expl} \approx \frac{R}{c}.$$

En vertu de l'équilibre hydrostatique, ces deux estimations sont du même ordre de grandeur et définissent l'échelle de temps dynamique que nous noterons  $\tau_{dyn}$

$$\tau_{dyn} \approx \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \approx \frac{1}{\sqrt{G\rho}}.$$

où  $\rho$  est la densité moyenne de l'étoile. La comparaison de ces deux expressions permet de déduire une estimation de la vitesse du son dans l'étoile

$$c \approx \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

Le tableau ci-dessous donne quelques valeurs typiques du temps dynamique dans quelques types d'étoiles.

Etoile	$\rho$ (g cm <sup>-3</sup> )	$\tau_{dyn} = 1/\sqrt{G\rho}$
étoile de neutrons	10 <sup>15</sup>	0,12 ms
naine blanche	10 <sup>6</sup>	3,9 s
Soleil	1,41	54 min
supergéante rouge	10 <sup>-9</sup>	3,9 ans

### Exercice

Montrer que l'échelle de temps dynamique caractérise aussi le mouvement de révolution d'un satellite en orbite basse ainsi que la rotation rapide d'une étoile, à la limite de la dislocation par la force centrifuge.

## 2.2 Le temps de pulsation

La définition d'un temps caractéristique de pulsation nécessite quelques précautions. Nous verrons qu'une étoile possède une infinité de modes de pulsation et qu'il en existe à toutes les échelles de temps. Cela ne doit pas étonner : une simple corde vibrante possède un mode fondamental et une infinité d'harmoniques dont les périodes tendent vers zéro. Pour les étoiles variables des types les plus caractéristiques (céphéides, RR Lyr) la pulsation observée est en fait un mode acoustique radial d'ordre peu élevé (fondamental ou premier harmonique). L'estimation que nous allons faire concerne ce type de pulsation. Puisqu'il

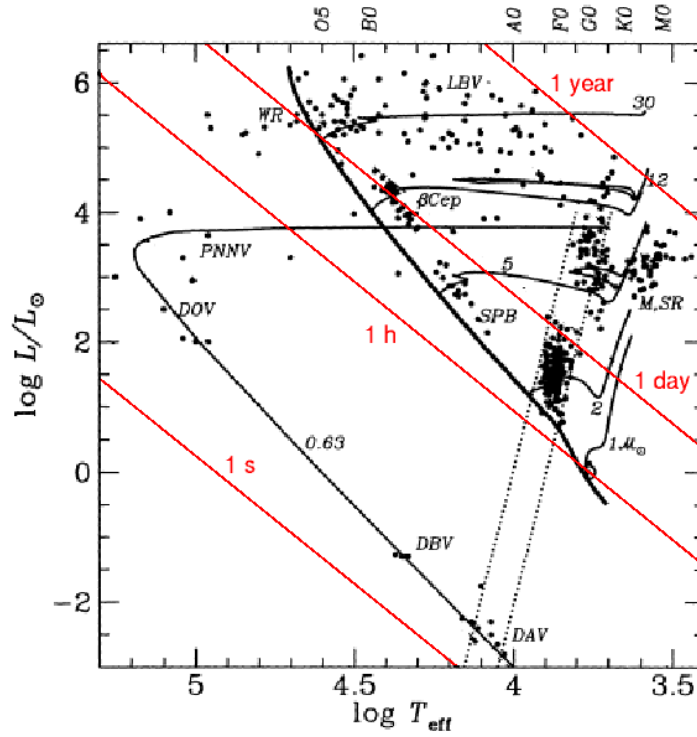


FIG. 2.1 – Diagramme HR dans les variables  $\log T_e$  et  $\log L/L_\odot$ . Il montre les droites sur lesquelles  $\tau_{dyn} = 1/\sqrt{G\rho}$  prend des valeurs constantes (Gautschy, Saio, 1955).

s'agit d'une onde de pression (onde sonore), on estime un temps caractéristique de pulsation

$$\tau_{puls} \approx R/c.$$

Le temps caractéristique obtenu est à nouveau le temps dynamique

$$\tau_{puls} \approx \tau_{dyn} \approx 1/\sqrt{G\rho}.$$

Le produit  $Période \times \sqrt{G\rho}$  est donc un nombre sans dimension de l'ordre de l'unité, relativement indépendant du modèle stellaire considéré. Pour le Soleil (période du mode fondamental : 63 minutes), il vaut 1,6. On a pris l'habitude d'utiliser la constante de pulsation  $Q$  qui lui est proportionnelle et définie par

$$Q = Période \times \sqrt{\frac{\rho}{\rho_\odot}}.$$

$Q$  a les dimensions d'un temps et les calculs détaillés montrent qu'en règle générale on a

$$0,03 \text{ jour} \leq Q \leq 0,08 \text{ jour}.$$

On notera que dans certaines circonstances, peu courantes, l'estimation faite ci-dessus du mode fondamental peut être complètement erronée (c'est le cas pour un modèle proche de l'instabilité dynamique).

En prenant en compte les relations  $M = 4\pi R^3 \rho / 3$  et  $L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4$ , on peut exprimer  $\tau_{dyn} = 1/\sqrt{G\rho}$  de la façon suivante,

$$\log \tau_{dyn} = 14.8 - \frac{1}{2} \log \frac{M}{M_\odot} + \frac{3}{4} \log \frac{L}{L_\odot} - 3 \log T_e.$$

La figure 2.1 montre comment le temps dynamique varie dans le diagramme HR pour une étoile d'une masse solaire.

## 2.3 Le temps d'Helmholtz-Kelvin

Lorsqu'une étoile brûle calmement un combustible nucléaire, l'équilibre thermique résulte de la compensation entre le taux de production d'énergie et le taux de perte d'énergie par rayonnement. On estime un temps caractéristique des phénomènes thermiques dans l'étoile en la supposant brutalement privée de sa source d'énergie nucléaire. Elle devrait alors prélever l'énergie qu'elle rayonne sur son énergie totale  $E$ . Le temps caractéristique d'un tel processus est le temps d'Helmholtz-Kelvin. Il est donné par

$$\tau_{HK} \approx |E|/L.$$

Dans les conditions stellaires habituelles, le théorème du viriel donne entre l'énergie totale de l'étoile et son énergie potentielle  $\Omega$  la relation

$$E = \frac{1}{2}\Omega.$$

D'autre part  $\Omega$  est donné par

$$\Omega = -q \frac{GM^2}{R}.$$

où  $q$  est un facteur proche de l'unité, comme le montre le tableau suivant

Modèle	$q$
modèle homogène	0,6
polytrophe d'indice $n$	$3/(5-n)$
modèle de séquence principale	1,5

On peut donc écrire

$$\tau_{HK} \approx \frac{GM^2}{LR}.$$

Pour le Soleil, cette expression vaut  $3,1 \times 10^7$  ans.

Il est intéressant de comparer l'échelle de temps dynamique à l'échelle de temps thermique

$$\frac{\tau_{dyn}}{\tau_{HK}} \approx \frac{LR^{5/2}}{G^{3/2}M^{5/2}}.$$

Ce rapport est beaucoup plus petit que l'unité. Pour le Soleil, il est de  $1,6 \times 10^{-12}$ .



La comparaison des deux échelles de temps montre que les phénomènes thermiques sont très lents, comparés aux phénomènes dynamiques. Dans une première approximation, ils pourront être négligés dans l'étude des phénomènes dynamiques. Il faut toutefois prendre garde au fait que ces estimations sont globales. Localement, les phénomènes thermiques peuvent avoir des temps caractéristiques beaucoup plus courts, comparables au temps dynamique (dans les couches extérieures de l'étoile, par exemple).

## 2.4 Le temps nucléaire

Considérons une étoile sur la séquence principale, brûlant son hydrogène dans les régions centrales, et tâchons d'estimer le temps nécessaire pour que sa composition chimique soit modifiée de façon significative. 1 gramme d'hydrogène libère une énergie de l'ordre de  $0,007c^2 \approx 6 \times 10^{18}$  ergs. Si on estime à 10 % la fraction de la masse qui subit la fusion, on obtient un temps de vie nucléaire

$$\tau_{nuc} \approx 6 \times 10^{17} \frac{M}{L} \quad (\text{CGS}).$$

Pour le Soleil, cette expression donne  $9,8 \times 10^9$  ans. Le rapport du temps d'Helmholtz-Kelvin au temps caractéristique nucléaire est donné par

$$\frac{\tau_{HK}}{\tau_{nuc}} \approx 1,11 \times 10^{-25} \frac{M}{R} \quad (\text{CGS}).$$

Ce rapport est généralement petit. Dans le cas du Soleil, il vaut  $3,2 \times 10^{-3}$ . Pour une étoile sur la séquence principale, on pourra donc négliger les variations de composition chimique dans l'étude des phénomènes thermiques.

## Référence

Gautschy A., Saio H., 1995. Stellar pulsations across the HR diagram : part 1. *Ann Rev Astron Astrophys*, 33, 75–113.



## Chapitre 3

# Équations générales

L'étude de la stabilité des étoiles repose évidemment sur les mêmes théories physiques que la construction des modèles d'équilibre : l'hydrodynamique, la théorie du transfert radiatif, la thermodynamique, la théorie des réactions nucléaires, etc.

Deux méthodes sont couramment utilisées pour décrire le mouvement d'un fluide : la description lagrangienne et la description eulérienne. Dans la description lagrangienne, chaque particule du fluide est repérée par un indice variant continûment et est suivie, lors de son mouvement, de la même manière qu'une particule en mécanique. Pour fixer les idées, cet indice pourrait être la position initiale  $\vec{r}_0$  de la particule. Nous utiliserons, plus généralement un vecteur  $\vec{a}$  quelconque comme indice. Le fluide est alors décrit par les fonctions  $\vec{r}(\vec{a}, t)$ ,  $\rho(\vec{a}, t)$ ,  $P(\vec{a}, t)$ , ...

Dans la description eulérienne, on n'individualise plus les particules de fluide, mais on enregistre en chaque point, repéré par le vecteur position  $\vec{r}$ , les grandeurs caractérisant le fluide. Il est donc décrit par les fonctions  $\vec{v}(\vec{r}, t)$ ,  $\rho(\vec{r}, t)$ ,  $P(\vec{r}, t)$ , ...

Le risque de confusion entre les deux représentations provient du fait qu'on utilise le même symbole,  $\rho$  par exemple, pour désigner des fonctions différentes,  $\rho(\vec{a}, t)$  et  $\rho(\vec{r}, t)$ .

Il faudra en particulier veiller à ne pas confondre les dérivées temporelles des deux formalismes :  $\partial/\partial t$  désigne la dérivée temporelle en suivant le mouvement dans le formalisme lagrangien tandis que dans le formalisme eulérien ce symbole désigne la dérivée temporelle en un point donné. C'est ainsi qu'on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} &= \vec{v} && \text{dans le formalisme de Lagrange,} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} &= 0 && \text{dans le formalisme d'Euler.} \end{aligned}$$

Dans le formalisme eulérien, on introduit un opérateur différentiel qu'on appelle dérivée de Stokes ou dérivée par rapport à  $t$  en suivant le mouvement et qu'on note  $D/Dt$  ou  $d/dt$ . Cet opérateur est défini de la façon suivante.

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial X}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } X.$$

Il est clair que

$$\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)_{Lagrange} = \frac{dX}{dt}.$$

En pratique, on mêle parfois les deux formalismes et pour éviter toute confusion entre  $(\partial/\partial t)_{Euler}$  et  $(\partial/\partial t)_{Lagrange}$  on réserve la notation  $\partial/\partial t$  pour  $(\partial/\partial t)_{Euler}$  et on note  $d/dt$  l'opérateur  $(\partial/\partial t)_{Lagrange}$ . Cette convention est cohérente avec la relation vue ci-dessus entre la dérivée de Stokes et la dérivée temporelle dans le formalisme de Lagrange.

### 3.1 Équation de continuité

L'équation de continuité exprime la conservation de la masse. On peut l'écrire sous la forme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \vec{v} = 0.$$

Dans le formalisme lagrangien, on peut l'écrire sous la forme intégrée

$$\rho X = \rho_0 X_0,$$

où  $X$  désigne le déterminant jacobien

$$X = \left| \frac{\partial(x)}{\partial(a)} \right|.$$

On retrouve aisément la forme précédente de l'équation si note que

$$\frac{dX}{dt} = X \text{div} \vec{v}.$$

### 3.2 Équation de mouvement

L'équation de mouvement s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} &= -\text{grad} \Phi - \frac{1}{\rho} \text{grad} P \\ \text{ou} \quad \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\text{grad} \Phi - \frac{1}{\rho} \text{grad} P. \end{aligned}$$

On notera que nous n'avons pas écrit de termes de viscosité. Dans la dynamique d'une étoile, les effets de viscosité moléculaire jouent un rôle tout à fait négligeable et le fluide peut être considéré comme parfait. Dans le cas des zones convectives, la vitesse qui intervient dans l'équation de mouvement est une vitesse d'ensemble, qui ne tient pas compte du détail des mouvements convectifs. Elle est obtenue en effectuant une moyenne sur des régions plus grandes que les éléments convectifs. L'existence de mouvements convectifs se traduit alors par l'apparition de termes supplémentaires dans l'équation de mouvement, sous la forme de termes de pression et de viscosité turbulentes. Ces termes, contrairement aux termes de viscosité moléculaire, ne sont en général pas négligeables. On ne possède malheureusement pas de théorie satisfaisante de la convection non stationnaire. Dans ce cours nous n'aborderons pas le problème de la convection non stationnaire. Nous écrirons les équations pour une zone radiative.

### 3.3 Équation de Poisson

Le potentiel  $\Phi$  du champ gravifique obéit à l'équation de Poisson

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho.$$

C'est la solution régulière à l'infini qui a un sens physique, elle est donnée par

$$\Phi(P) = -G \int \frac{\rho_Q dV_Q}{|PQ|}.$$

### 3.4 Équation de conservation de l'énergie

L'équation de conservation de l'énergie s'écrit

$$T \left( \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } S \right) = \epsilon - \frac{1}{\rho} \text{div } \vec{F}$$

ou  $T \frac{dS}{dt} = \epsilon - \frac{1}{\rho} \text{div } \vec{F},$

où  $S$  est l'entropie par unité de masse,  $\epsilon$  le taux de génération d'énergie nucléaire par unité de masse et  $\vec{F}$  la densité de flux d'énergie. Rappelons que la quantité d'énergie qui traverse l'élément de surface  $dS$  en l'unité de temps est donnée par  $\vec{F} \cdot \vec{dS}$  où  $\vec{dS} = \vec{n}dS$ ,  $\vec{n}$  étant le vecteur normal unitaire de  $dS$ . En général  $\vec{F}$  se compose d'un terme radiatif et d'un terme convectif  $\vec{F} = \vec{F}_R + \vec{F}_C$ .

### 3.5 Équation de transfert

Dans les intérieurs d'étoile, le libre parcours moyen des photons est extrêmement petit comparé aux longueurs caractéristiques du milieu. Il en résulte que l'équation de diffusion constitue une excellente approximation de l'équation de transfert radiatif,

$$\vec{F}_R = -\lambda \text{grad } T \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{4acT^3}{3\kappa\rho}.$$

On notera que le flux de conduction dans les naines blanches est donné par une expression de la même forme (mais le coefficient de conduction  $\lambda$  s'exprime différemment). Nous ne donnerons pas ici l'expression du flux convectif, pour les raisons invoquées plus haut.

### 3.6 Conditions aux limites

Des conditions aux limites adéquates doivent être imposées à la surface de l'étoile. L'approximation la plus grossière consiste à annuler la pression et la température à la surface de l'étoile. A l'approximation suivante, on considère que la photosphère définit la limite entre l'intérieur et l'atmosphère. On y imposera des conditions de raccord. Cette division en modèle d'intérieur et modèle d'atmosphère est commode car ces modèles reposent sur des traitements différents de l'équation de transfert.

### 3.7 Équations d'état

En plus des équations aux dérivées partielles et des conditions limites associées que nous avons écrites jusqu'à présent, nous avons encore besoin d'équations décrivant le comportement de la matière en fonction de sa composition chimique et des variables thermodynamiques. Ces équations sont parfois appelées équations constitutives ou équations matérielles. Nous les appellerons simplement équations d'état, au sens large. Elles comprennent l'équation d'état, au sens habituel, l'opacité  $\kappa$  et le taux de génération d'énergie nucléaire  $\epsilon$ . Nous désignerons symboliquement par  $\chi$  la composition chimique et nous prendrons  $\rho$  et  $T$  comme variables thermodynamiques indépendantes. Les propriétés de la matière sont alors décrites par des relations de la forme

$$P = P(\rho, T, \chi), \quad U = U(\rho, T, \chi), \quad \kappa = \kappa(\rho, T, \chi), \quad \epsilon = \epsilon(\rho, T, \chi).$$

Notons toutefois que la génération d'énergie nucléaire résulte en général de toute une série de réactions dont les taux dépendent des concentrations d'éléments très peu abondants, de durées de vie courtes (à l'échelle de l'évolution stellaire) et qui ne sont pas décrits par  $\chi$ . Ce n'est que si ces éléments ont atteint leurs abondances d'équilibre qu'on peut considérer  $\epsilon$  comme fonction de  $\rho$ ,  $T$  et  $\chi$ .

## Chapitre 4

# Configuration d'équilibre

Une configuration d'équilibre à symétrie sphérique obéit aux équations suivantes, déduites des équations générales.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} + \frac{d\Phi}{dr} &= 0, \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) &= 4\pi G\rho, \\ \epsilon - \frac{1}{\rho r^2} \frac{d}{dr} (r^2 F) &= 0, \\ F &= -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dr} \quad (\text{zone radiative}).\end{aligned}$$

Rappelons que la condition de stabilité d'une zone radiative vis-à-vis de la convection est donnée par le critère de Schwarzschild

$$A \equiv \frac{d \ln \rho}{dr} - \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln P}{dr} < 0.$$

Soit  $m(r)$  la masse de la sphère de rayon  $r$  et  $L(r)$  la luminosité de cette sphère.

$$\begin{aligned}m &= \int_0^r 4\pi r^2 \rho \, dr, \\ L &= 4\pi r^2 F.\end{aligned}$$

Les équations ci-dessus prennent alors leur forme habituelle

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dr} &= -\frac{Gm\rho}{r^2}, \\ \frac{dm}{dr} &= 4\pi r^2 \rho, \\ \frac{dL}{dr} &= 4\pi r^2 \rho \epsilon, \\ \frac{dT}{dr} &= -\frac{3\kappa\rho L}{16\pi r^2 acT^3} \quad (\text{zone radiative}).\end{aligned}$$

On notera que dans certaines phases de l'évolution, les modèles ne sont pas en équilibre thermique et l'équation de conservation de l'énergie thermique garde un terme en la dérivée de l'entropie. Nous ne considérerons pas, dans ce qui suit, de modèles hors d'équilibre thermique.

Ces équations doivent être complétées par des conditions aux limites. Nous devons imposer d'une part des conditions limites *naturelles* à la surface de l'étoile et d'autre part des conditions limites *artificielles* au centre (celles-ci proviennent du fait que le système de coordonnées sphériques utilisé est singulier au centre de l'étoile). Au centre,  $m$  et  $L$  doivent s'annuler. A la surface (photosphère), les conditions limites se déduisent d'un modèle détaillé des couches supérieures. Si on décrit l'atmosphère par une loi de température de la forme

$$T^4(\tau) = \frac{3}{4}T_e^4 \left( \tau + \frac{2}{3} \right),$$

on pourra adopter les conditions limites suivantes

$$P = \frac{2}{3} \frac{GM}{\bar{\kappa} r^2},$$

$$T = T_e \quad \text{ou} \quad L = 4\pi r^2 \sigma T^4.$$

## Référence

Pour plus de détails sur les configurations d'équilibre, on consultera le cours d' *Évolution stellaire* ou le livre de Kippenhahn et Weigert (1990).

Kippenhahn R., Weigert A., 1990. Stellar structure and evolution. Springer.



## Chapitre 5

# Méthode des petites perturbations

On ne peut évidemment pas envisager de résoudre les équations régissant le comportement d'une étoile dans toute leur généralité. Cependant, si les variables décrivant le mouvement s'écartent peu de leurs valeurs dans la configuration d'équilibre (ou plus généralement d'un mouvement particulier connu), on pourra écrire toute variable  $X$  comme la somme de la valeur  $X_0$  qu'elle prend dans la configuration d'équilibre et qu'on qualifiera de non perturbée et d'une correction  $\delta X$  qu'on appellera perturbation,

$$X = X_0 + \delta X.$$

En substituant ces expressions dans les équations et en négligeant les termes d'ordre supérieur au premier en les perturbations, on obtient des équations linéaires qui se prêtent à une étude beaucoup plus aisée que les équations originales et dont les solutions constituent des approximations utiles.

La méthode des petites perturbations nous permettra d'étudier la stabilité d'un modèle stellaire vis-à-vis de perturbations suffisamment petites. Elle est toutefois incapable de nous informer sur la stabilité vis-à-vis de perturbations d'amplitude finie, sur l'existence d'états métastables ou de cycles limites au voisinage de la configuration non perturbée. Elle ne pourra pas non plus fournir l'amplitude de pulsation d'une étoile variable.

Si la configuration non perturbée est stationnaire (ce sera toujours le cas dans ce cours), les coefficients des équations linéarisées sont indépendants du temps. On peut alors espérer écrire une solution quelconque comme une combinaison linéaire de solutions simples dépendant du temps par un facteur exponentiel  $e^{st}$  ( $s$  peut être complexe), qu'on appelle modes normaux. Dans le cas d'un système mécanique possédant un nombre fini de degrés de liberté, les modes normaux sont également en nombre fini. Dans le cas présent, nous avons une infinité de degrés de liberté et il existe une infinité dénombrable de modes normaux d'oscillation (comme dans le cas de la corde vibrante). Un mode est stable ou instable selon que  $\Re s < 0$  ou  $\Re s > 0$ . Si une configuration stellaire a tous ses modes normaux stables elle est stable, mais il suffit d'un mode instable pour qu'elle soit instable. Dans le cas exceptionnel où la stabilité d'un ou plusieurs modes est marginale ( $\Re s = 0$ ), les autres modes étant stables, l'analyse linéaire ne permet pas de savoir si le modèle considéré est stable ou non.

## Exercice

Comment s'expriment les perturbations d'une somme, d'un produit, d'un quotient ?

## 5.1 Perturbations lagrangiennes et eulériennes

Aux deux descriptions de l'hydrodynamique correspondent deux types de perturbations. On définit la perturbation lagrangienne  $\delta X$  de  $X$  par

$$X(\vec{a}, t) = X_0(\vec{a}, t) + \delta X(\vec{a}, t)$$

et la perturbation eulérienne  $X'$  par

$$X(\vec{r}, t) = X_0(\vec{r}, t) + X'(\vec{r}, t).$$

Entre la perturbation lagrangienne et la perturbation eulérienne d'une même grandeur  $X$ , on a la relation

$$\delta X = X' + \vec{\delta r} \cdot \text{grad } X_0.$$

Comme la variable  $X$  désignant une certaine grandeur dans l'état perturbé n'intervient pas dans les équations aux perturbations, mais qu'y interviennent seulement  $X_0$ ,  $\delta X$  et  $X'$ , on convient d'omettre l'indice 0 pour désigner l'état non perturbé. La relation ci-dessus s'écrira donc

$$\delta X = X' + \vec{\delta r} \cdot \text{grad } X.$$

En désignant par  $x_i$  des coordonnées quelconques, on a les relations évidentes suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial X'}{\partial t} &= \left( \frac{\partial X}{\partial t} \right)', \\ \frac{\partial X'}{\partial x_i} &= \left( \frac{\partial X}{\partial x_i} \right)', \\ \frac{d \delta X}{dt} &= \delta \frac{dX}{dt}. \end{aligned}$$

Lorsqu'on utilise des perturbations lagrangiennes en formalisme eulérien (ou l'inverse), il convient d'être très attentif. Ainsi la relation entre  $\partial \delta X / \partial x_i$  et  $\delta (\partial X / \partial x_i)$  n'est pas évidente. En se servant des relations ci-dessus, il vient

$$\frac{\partial \delta X}{\partial x_i} = \delta \frac{\partial X}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial \delta x_j}{\partial x_i} \frac{\partial X}{\partial x_j}.$$

En général les équations sont plus faciles à écrire en formalisme eulérien. Cependant, dans le cas des oscillations radiales, le formalisme lagrangien s'avère plus commode.

## Remarques

Les deux remarques évidentes qui suivent s'avèrent souvent utiles dans les calculs.

1) Si la configuration non perturbée est statique ( $\vec{v} = 0$  partout), alors

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}.$$

2) Si la grandeur  $X$  est indépendante des coordonnées dans un certain domaine de la configuration non perturbée, alors, dans ce domaine, on a

$$\delta X = X'.$$

## 5.2 Perturbation des équations différentielles

Equation de continuité :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \text{div} \left( \rho \frac{\partial \vec{\delta r}}{\partial t} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \rho' + \text{div}(\rho \vec{\delta r}) = 0.$$

Equation de mouvement :

$$\frac{\partial^2 \vec{\delta r}}{\partial t^2} = -\text{grad} \Phi' + \frac{\rho'}{\rho^2} \text{grad} P - \frac{1}{\rho} \text{grad} P'.$$

Equation de Poisson :

$$\Delta \Phi' = 4\pi G \rho'.$$

Equation de conservation de l'énergie :

$$T \left( \frac{\partial S'}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} S \right) = \epsilon' + \frac{\rho'}{\rho^2} \text{div} \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{div} \vec{F}'.$$

Equation de transfert radiatif :

$$\vec{F}' = -\lambda' \text{grad} T - \lambda \text{grad} T'.$$

Les conditions aux limites seront précisées dans chaque cas particulier que nous considérerons.

Dans des conditions non stationnaires, le flux convectif ne peut pas être calculé par simple perturbation de l'expression qui donne le flux dans le cas stationnaire. En effet, les éléments convectifs ont une certaine durée de vie et du fait de leur inertie (mécanique et thermique) ne s'adaptent pas instantanément aux conditions changeantes du milieu. Ce n'est que dans le cas où le temps caractéristique de la perturbation étudiée est nettement plus grand que le temps de vie des éléments convectifs qu'on peut considérer la convection comme instantanément adaptée et utiliser l'expression habituelle du flux convectif.

### 5.3 Perturbation des équations d'état

Au cours de la pulsation, on peut admettre que les relations  $P = P(\rho, T)$  et  $\kappa = \kappa(\rho, T)$  valides dans une situation stationnaire continuent à être satisfaites à chaque instant (nous ne considérons pas les cas où il y a changement de phases comme dans certaines naines blanches). On écrira donc

$$\begin{aligned}\frac{\delta P}{P} &= P_\rho \frac{\delta \rho}{\rho} + P_T \frac{\delta T}{T}, \\ \frac{\delta \kappa}{\kappa} &= \kappa_\rho \frac{\delta \rho}{\rho} + \kappa_T \frac{\delta T}{T},\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}P_\rho &= \left( \frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_T, \\ P_T &= \left( \frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_\rho, \\ \kappa_\rho &= \left( \frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln \rho} \right)_T, \\ \kappa_T &= \left( \frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln T} \right)_\rho.\end{aligned}$$

Ces grandeurs peuvent être calculées ou déduites des tables utilisées lors de la construction des modèles stellaires. Les coefficients  $P_\rho$  et  $P_T$  peuvent être calculés en termes des coefficients  $\Gamma$ , que nous utiliserons souvent.

$$\Gamma_1 = \left( \frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_S, \quad \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} = \left( \frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} \right)_S, \quad \Gamma_3 - 1 = \left( \frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho} \right)_S.$$

Parmi ces trois coefficients, deux sont indépendants. Il est aisé de voir qu'on a, en effet, la relation

$$\frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} = \frac{\Gamma_3 - 1}{\Gamma_1}.$$

Soit  $U$  l'énergie interne par unité de masse. Rappelons la relation

$$\delta U = T \delta S - P \delta V$$

ou encore

$$T = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_V \quad \text{et} \quad P = - \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_S.$$

Exprimons que

$$\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} = \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S},$$

il vient

$$- \left( \frac{\partial P}{\partial S} \right)_V = \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_S.$$

En prenant  $\rho$  et  $S$  comme variables indépendantes, cette relation s'écrit

$$\left(\frac{\partial \ln P}{\partial S}\right)_\rho = \frac{(\Gamma_3 - 1)\rho T}{P}.$$

On peut évidemment écrire

$$\begin{aligned}\frac{\delta P}{P} &= \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right)_S \frac{\delta \rho}{\rho} + \left(\frac{\partial \ln P}{\partial S}\right)_\rho \delta S, \\ \frac{\delta T}{T} &= \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho}\right)_S \frac{\delta \rho}{\rho} + \left(\frac{\partial \ln T}{\partial S}\right)_\rho \delta S.\end{aligned}$$

Le coefficient  $(\partial \ln T / \partial S)_\rho$  n'est rien d'autre que l'inverse de  $c_v$ , la chaleur spécifique à volume constant, par unité de masse. Les relations ci-dessus s'écrivent donc

$$\begin{aligned}\frac{\delta P}{P} &= \Gamma_1 \frac{\delta \rho}{\rho} + \frac{(\Gamma_3 - 1)c_v \rho T}{P} \frac{\delta S}{c_v}, \\ \frac{\delta T}{T} &= (\Gamma_3 - 1) \frac{\delta \rho}{\rho} + \frac{\delta S}{c_v}.\end{aligned}$$

L'élimination de  $\delta S$  donne l'équation d'état linéarisée

$$\frac{\delta P}{P} = \left[ \Gamma_1 - \frac{(\Gamma_3 - 1)^2 c_v \rho T}{P} \right] \frac{\delta \rho}{\rho} + \frac{(\Gamma_3 - 1)c_v \rho T}{P} \frac{\delta T}{T},$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}P_\rho &= \Gamma_1 - \frac{(\Gamma_3 - 1)^2 c_v \rho T}{P}, \\ P_T &= \frac{(\Gamma_3 - 1)c_v \rho T}{P}.\end{aligned}$$

En ce qui concerne  $\epsilon$ , le taux de génération d'énergie nucléaire, la situation est toute différente. Au cours de la pulsation, l'abondance des différents réactifs nucléaires ne s'adapte aux valeurs instantanées de  $\rho$  et  $T$  que si le temps caractéristique de la pulsation est long comparé aux temps de vie des réactifs. Dans ce cas on pourra bien écrire

$$\frac{\delta \epsilon}{\epsilon} = \epsilon_\rho \frac{\delta \rho}{\rho} + \epsilon_T \frac{\delta T}{T},$$

avec

$$\epsilon_\rho = \left(\frac{\partial \ln \epsilon}{\partial \ln \rho}\right)_T \quad \text{et} \quad \epsilon_T = \left(\frac{\partial \ln \epsilon}{\partial \ln T}\right)_\rho.$$

Mais en général, ce ne sera pas le cas, il faudra prendre en considération les détails des réactions nucléaires et étudier les solutions perturbées des équations qui régissent leur cinétique. On obtiendra alors

$$\frac{\delta \epsilon}{\epsilon} = \epsilon_\rho(\sigma) \frac{\delta \rho}{\rho} + \epsilon_T(\sigma) \frac{\delta T}{T},$$

où les coefficients  $\epsilon_\rho$  et  $\epsilon_T$  sont des fonctions de la fréquence  $\sigma$  de la pulsation. Ces coefficients sont en général complexes (décalage de phase). Dans la littérature, on les désigne souvent sous les termes de  $\mu$  et  $\nu$  effectifs.

## Exercices

1. Calculez les coefficients thermodynamiques d'un gaz parfait, d'un mélange de gaz et de rayonnement, d'un mélange de gaz dont l'un est partiellement ionisé.
2. Calculez les coefficients  $\epsilon_\rho(\sigma)$  et  $\epsilon_T(\sigma)$  pour la chaîne proton-proton et pour le cycle du carbone.

## Chapitre 6

# Perturbations adiabatiques

Nous avons vu que le temps caractéristique de transfert d'énergie dans une étoile est beaucoup plus long que le temps caractéristique des phénomènes dynamiques (sauf dans les couches extérieures de l'étoile). Pour les perturbations qui évoluent sur une échelle de temps dynamique, il est donc naturel, dans une première approximation, de négliger les phénomènes de transfert et de production d'énergie. L'équation de conservation de l'énergie s'écrit alors

$$\delta S = 0.$$

Cette équation définit une perturbation adiabatique. Il en résulte une relation simple entre les variations de densité et de pression.

$$\frac{\delta P}{P} = \Gamma_1 \frac{\delta \rho}{\rho} \quad \text{ou} \quad \delta P = c^2 \delta \rho,$$

où  $c = \sqrt{\Gamma_1 P / \rho}$  est la vitesse du son.

Bien sûr, dans l'approximation adiabatique, on n'a plus besoin d'équation de transfert. On gardera donc l'équation adiabatique, l'équation de continuité, l'équation de mouvement et l'équation de Poisson. Nous allons montrer que le problème ainsi simplifié peut se mettre sous une forme auto-adjointe.

Toutes les grandeurs perturbées s'expriment aisément en termes du déplacement  $\vec{\delta r}$ . L'équation de continuité s'écrit

$$\rho' + \text{div}(\rho \vec{\delta r}) = 0 \quad \text{ou} \quad \delta \rho + \rho \text{div} \vec{\delta r} = 0$$

et donne

$$\rho' = -\text{div}(\rho \vec{\delta r}) \quad \text{ou} \quad \delta \rho = -\rho \text{div} \vec{\delta r}.$$

L'équation adiabatique donne alors  $\delta P$  ou  $P'$

$$\delta P = -\Gamma_1 P \text{div} \vec{\delta r} \quad \text{ou} \quad P' = -\Gamma_1 P \text{div} \vec{\delta r} - \vec{\delta r} \cdot \text{grad} P.$$

Enfin l'équation de Poisson

$$\Delta \Phi' = 4\pi G \rho'$$

a pour solution

$$\Phi'(P) = -G \int \frac{\rho'_Q dV_Q}{|PQ|} = G \int \frac{\operatorname{div}(\rho \vec{\delta r})_Q dV_Q}{|PQ|}.$$

L'équation de mouvement

$$\frac{d^2 \vec{\delta r}}{dt^2} = -\operatorname{grad} \Phi' + \frac{\rho'}{\rho^2} \operatorname{grad} P - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P'$$

peut donc s'écrire

$$\frac{d^2 \vec{\delta r}}{dt^2} = \mathcal{L} \vec{\delta r},$$

où  $\mathcal{L}$  est l'opérateur linéaire défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \vec{\delta r} &= -G \operatorname{grad}_P \int \frac{\operatorname{div}(\rho \vec{\delta r})_Q dV_Q}{|PQ|} - \frac{1}{\rho^2} \operatorname{div}(\rho \vec{\delta r}) \operatorname{grad} P \\ &\quad + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad}(\Gamma_1 P \operatorname{div} \vec{\delta r}) + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad}(\vec{\delta r} \cdot \operatorname{grad} P). \end{aligned}$$

Considérons l'espace fonctionnel des champs vectoriels continûment dérivables et définissons le produit scalaire de deux tels champs par

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \int_V \rho \vec{u} \cdot \vec{v} dV = \overline{(\vec{v}, \vec{u})}.$$

Dans l'intégrale,  $V$  désigne un volume suffisamment grand pour englober toute la configuration stellaire. Nous désignerons par  $S$  la surface limitant ce volume.

Nous allons montrer que  $\mathcal{L}$  est un opérateur symétrique. Comme il est manifestement réel, il sera donc hermitien (ou auto-adjoint). Pour deux champs réels  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , nous allons montrer qu'on a

$$(\mathcal{L} \vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \mathcal{L} \vec{v}).$$

Pour démontrer cette propriété, nous ferons usage du procédé suivant

$$\begin{aligned} \int_V \vec{a} \cdot \operatorname{grad} \alpha dV &= \int_V [\operatorname{div}(\alpha \vec{a}) - \alpha \operatorname{div} \vec{a}] dV \\ &= \oint_S \alpha \vec{a} \cdot \vec{dS} - \int_V \alpha \operatorname{div} \vec{a} dV = - \int_V \alpha \operatorname{div} \vec{a} dV. \end{aligned}$$

La dernière égalité n'est justifiée que si l'intégrale de surface est nulle, ce qui doit être vérifié dans chaque cas.

$$\begin{aligned} (\mathcal{L} \vec{u}, \vec{v}) &= -G \int dV_P \rho \vec{v} \cdot \operatorname{grad}_P \int \frac{\operatorname{div}(\rho \vec{u})_Q dV_Q}{|PQ|} - \int \frac{1}{\rho} (\vec{v} \cdot \operatorname{grad} P) \operatorname{div}(\rho \vec{u}) dV \\ &\quad + \int \vec{v} \cdot \operatorname{grad}(\Gamma_1 P \operatorname{div} \vec{u}) dV + \int \vec{v} \cdot \operatorname{grad}(\vec{u} \cdot \operatorname{grad} P) dV \\ &= A + B + C + D. \end{aligned}$$



Il vient

$$\begin{aligned}
A &= G \iint \frac{\operatorname{div}(\rho \vec{u})_Q \operatorname{div}(\rho \vec{v})_P}{|PQ|} dV_P dV_Q, \\
B &= - \int (\operatorname{div} \vec{u}) \vec{v} \cdot \operatorname{grad} P dV - \int \frac{1}{\rho} (\vec{u} \cdot \operatorname{grad} \rho) (\vec{v} \cdot \operatorname{grad} P) dV = B_1 + B_2, \\
C &= - \int \Gamma_1 P (\operatorname{div} \vec{u}) (\operatorname{div} \vec{v}) dV, \\
D &= - \int (\vec{u} \cdot \operatorname{grad} P) \operatorname{div} \vec{v} dV.
\end{aligned}$$

Les termes  $A$ ,  $B_2$  et  $C$  sont manifestement symétriques (Pour  $B_2$ , remarquer que  $\operatorname{grad} \rho \parallel \operatorname{grad} P$ ). Il en est de même de  $B_1 + D$ .

Revenons à l'équation de mouvement. Les solutions qui nous intéressent doivent satisfaire également des conditions aux limites linéaires, homogènes et indépendantes du temps. Le problème admet donc des solutions simples de la forme  $\vec{\xi}(\vec{r}) e^{st}$ . Ces solutions sont les modes normaux d'oscillation de l'étoile. Les  $\vec{\xi}(\vec{r})$  obéissent à l'équation (nous omettrons dorénavant la flèche sur  $\xi$ )

$$\mathcal{L}\xi = s^2 \xi.$$

La fonction  $\xi$  est appelée fonction propre et  $s$  valeur propre. En fait c'est  $\lambda = s^2$  qu'on devrait appeler valeur propre. Le problème admet une infinité dénombrable de valeurs propres. L'analogie avec un système mécanique possédant un nombre fini de degrés de liberté est évidente. Nous admettrons sans démonstration que ces fonctions propres forment un ensemble complet, c'est-à-dire qu'elles constituent une base pour exprimer une perturbation quelconque.

Le caractère hermitien de  $\mathcal{L}$  a quelques conséquences intéressantes.

1°) Les valeurs propres  $\lambda$  sont réelles. En effet si  $\xi$  est la fonction propre associée à  $\lambda$

$$\mathcal{L}\xi = \lambda \xi.$$

Formons le produit avec  $\xi$

$$(\mathcal{L}\xi, \xi) = \lambda(\xi, \xi).$$

Or

$$(\mathcal{L}\xi, \xi) = (\xi, \mathcal{L}\xi) = \overline{(\mathcal{L}\xi, \xi)},$$

donc  $\lambda = (\mathcal{L}\xi, \xi)/(\xi, \xi)$  est réel. Il en résulte que les fonctions propres sont réelles à un facteur près. Nous supposons toujours dans la suite qu'on a effectivement choisi des fonctions propres réelles. Si  $\lambda > 0$ ,  $s = \pm\sqrt{\lambda}$  et un des deux modes est instable. Une telle instabilité est appelée instabilité dynamique. Si  $\lambda < 0$ ,  $s = \pm i\sqrt{-\lambda}$  et l'analyse linéaire ne met en évidence aucune instabilité dynamique. Nous dirons qu'un modèle dont tous les modes ont  $\lambda < 0$  est dynamiquement stable.

2°) Les fonctions propres associées à des valeurs propres différentes sont orthogonales. En effet, soit

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\xi_i &= \lambda_i \xi_i \quad \text{et} \quad \mathcal{L}\xi_j = \lambda_j \xi_j, \\
\lambda_i(\xi_i, \xi_j) &= (\mathcal{L}\xi_i, \xi_j) = (\xi_i, \mathcal{L}\xi_j) = \lambda_j(\xi_i, \xi_j).
\end{aligned}$$

Si  $\lambda_i$  et  $\lambda_j$  sont distincts, on a  $(\xi_i, \xi_j) = 0$ . D'autre part, une famille de fonctions propres indépendantes associées à la même valeur propre peut toujours être orthogonalisée. On peut donc admettre en toute généralité que toutes les fonctions propres sont orthogonales entre elles.

3°) Les valeurs propres et fonctions propres satisfont à un principe variationnel. Considérons la fonctionnelle

$$\Lambda(\xi) = \frac{(\mathcal{L}\xi, \xi)}{(\xi, \xi)}$$

et calculons sa variation première

$$\delta\Lambda = \frac{1}{(\xi, \xi)^2} \{[(\mathcal{L}\delta\xi, \xi) + (\mathcal{L}\xi, \delta\xi)](\xi, \xi) - (\mathcal{L}\xi, \xi)[(\delta\xi, \xi) + (\xi, \delta\xi)]\} .$$

La condition  $\delta\Lambda = 0$  est équivalente à

$$(\xi, \xi)(\mathcal{L}\xi, \delta\xi) - (\mathcal{L}\xi, \xi)(\xi, \delta\xi) + (\xi, \xi)(\mathcal{L}\bar{\xi}, \bar{\delta\xi}) - (\mathcal{L}\xi, \xi)(\bar{\xi}, \bar{\delta\xi}) = 0 .$$

Comme  $\delta\xi$  est quelconque, on en déduit

$$\mathcal{L}\xi = \frac{(\mathcal{L}\xi, \xi)\xi}{(\xi, \xi)} = \Lambda(\xi)\xi .$$

Donc la fonctionnelle  $\Lambda(\xi)$  est stationnaire lorsque  $\xi$  est une fonction propre et alors la valeur propre correspondante est  $\Lambda(\xi)$ . De ce principe variationnel, on peut tirer une méthode de calcul des modes propres. Elle a été utilisée, mais pas très fréquemment. On peut également en tirer un procédé pour améliorer le calcul d'une valeur propre : une approximation grossière de  $\xi$  fournira une bonne approximation  $\Lambda(\xi)$  de la valeur propre  $\lambda$ .

Pour un mode stable, nous poserons  $s = -i\sigma$ . On notera que l'énergie cinétique moyenne d'un mode de fréquence angulaire  $\sigma$  est donnée

$$\bar{T} = \frac{\sigma^2}{4}(\xi, \xi) .$$

## Références

L'opérateur  $\mathcal{L}$  est un cas particulier de celui qu'utilisent Lynden-Bell et Ostriker (1967). Nous suivons d'assez près l'exposé de Cox (1980), chapitre 5.

Cox J.P., 1980. Theory of stellar pulsation. Princeton University Press.

Lynden-Bell D., Ostriker J.P., 1967. On the stability of differentially rotating bodies. MNRAS, 136, 293–310.

# Chapitre 7

## Oscillations radiales

### 7.1 Équations différentielles

Dans le cas des oscillations radiales, l'usage de perturbations lagrangiennes s'avère particulièrement commode car on peut remplacer la seule coordonnée spatiale  $r$  par une coordonnée « lagrangienne »  $m$ . L'intérêt de ce changement de variables vient du fait que l'opérateur  $\partial/\partial m$  commute avec l'opérateur  $\delta$  de perturbation lagrangienne.

Notons d'abord la relation entre  $\partial/\partial m$  et  $\partial/\partial r$

$$\frac{\partial}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \frac{\partial}{\partial r}.$$

Ecrivons à présent les équations générales pour un écoulement possédant la symétrie sphérique. Nous avons déjà noté précédemment que l'équation de Poisson s'intègre une fois pour donner

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{Gm}{r^2}.$$

Les équations de continuité, de mouvement, de conservation de l'énergie et de transfert radiatif s'écrivent respectivement

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 v) &= 0 & \text{ou} & & \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + 4\pi\rho \frac{\partial}{\partial m}(r^2 v) &= 0, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{Gm}{r^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} & \text{ou} & & \frac{dv}{dt} &= -\frac{Gm}{r^2} - 4\pi r^2 \frac{\partial P}{\partial m}, \\ T \frac{dS}{dt} &= \epsilon - \frac{1}{\rho r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 F) & \text{ou} & & T \frac{dS}{dt} &= \epsilon - \frac{\partial L}{\partial m}, \\ F &= -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \frac{\partial T}{\partial r} & \text{ou} & & L &= -\frac{64\pi^2 r^4 acT^3}{3\kappa} \frac{\partial T}{\partial m}. \end{aligned}$$

L'opérateur  $\delta$  de perturbation lagrangienne commute avec les deux opérateurs  $d/dt$  et  $\partial/\partial m$  apparaissant dans ces équations. On écrit donc aisément les équations aux perturbations

$$\frac{\delta\rho}{\rho} + 4\pi\rho \frac{\partial}{\partial m}(r^2 \delta r) = 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2\delta r}{dt^2} &= 2\frac{Gm}{r^2}\frac{\delta r}{r} - 8\pi r^2\frac{\partial P}{\partial m}\frac{\delta r}{r} - 4\pi r^2\frac{\partial \delta P}{\partial m}, \\ T\frac{d\delta S}{dt} &= \delta\epsilon - \frac{\partial \delta L}{\partial m}, \\ \delta L &= -\frac{64\pi^2 r^4 acT^3}{3\kappa} \left\{ \frac{\partial T}{\partial m} \left( 4\frac{\delta r}{r} + 3\frac{\delta T}{T} - \frac{\delta\kappa}{\kappa} \right) + \frac{\partial \delta T}{\partial m} \right\}.\end{aligned}$$

On revient ensuite à l'opérateur  $\partial/\partial r$  et, après quelques calculs, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\delta r}{r} \right) &= -\frac{1}{r} \left( 3\frac{\delta r}{r} + \frac{\delta\rho}{\rho} \right), \\ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\delta P}{P} \right) &= -\frac{1}{P} \frac{dP}{dr} \left\{ \frac{\delta P}{P} + 4\frac{\delta r}{r} - \frac{r^3}{Gm} \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\delta r}{r} \right) \right\}, \\ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\delta L}{L} \right) &= -\frac{1}{L} \frac{dL}{dr} \left( \frac{\delta L}{L} - \frac{\delta\epsilon}{\epsilon} \right) - \frac{4\pi r^2 \rho T}{L} \frac{d\delta S}{dt}, \\ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\delta T}{T} \right) &= -\frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \left( 4\frac{\delta r}{r} + 4\frac{\delta T}{T} - \frac{\delta L}{L} - \frac{\delta\kappa}{\kappa} \right).\end{aligned}$$

Ces équations doivent être complétées par les équations aux perturbations des équations d'état et par des conditions aux limites que nous allons préciser.

Les coefficients de ces équations linéaires sont indépendants du temps. Nous rechercherons donc des solutions simples du problème de la forme

$$\frac{\delta X}{X}(r, t) = \frac{\delta X}{X}(r)e^{st}.$$

Notons que, par abus d'écriture, on continue à désigner par  $\delta X/X$  la fonction de  $r$  seulement. Les équations aux dérivées partielles se réduisent alors à des équations différentielles dépendant du paramètre  $s$ .

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr} \left( \frac{\delta r}{r} \right) &= -\frac{1}{r} \left( 3\frac{\delta r}{r} + \frac{\delta\rho}{\rho} \right), \\ \frac{d}{dr} \left( \frac{\delta P}{P} \right) &= -\frac{1}{P} \frac{dP}{dr} \left\{ \frac{\delta P}{P} + \left( 4 - \frac{r^3 s^2}{Gm} \right) \frac{\delta r}{r} \right\}, \\ \frac{d}{dr} \left( \frac{\delta L}{L} \right) &= -\frac{1}{L} \frac{dL}{dr} \left( \frac{\delta L}{L} - \frac{\delta\epsilon}{\epsilon} \right) - \frac{4\pi r^2 c_v \rho T}{L} s \frac{\delta S}{c_v}, \\ \frac{d}{dr} \left( \frac{\delta T}{T} \right) &= -\frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \left( 4\frac{\delta r}{r} + 4\frac{\delta T}{T} - \frac{\delta L}{L} - \frac{\delta\kappa}{\kappa} \right).\end{aligned}$$

Le choix d'un système de coordonnées présentant une singularité au centre de l'étoile introduit dans le système différentiel une singularité régulière en ce point. On exigera que les grandeurs physiques  $\delta r$ ,  $\delta P$ , ... restent régulières. Un simple développement en série de puissances nous donne les conditions de régularité au centre sous la forme

$$\begin{aligned}3\frac{\delta r}{r} + \frac{\delta\rho}{\rho} &= 0, \\ \epsilon \left( \frac{\delta L}{L} - \frac{\delta\epsilon}{\epsilon} \right) + sT \delta S &= 0.\end{aligned}$$

En surface, les modèles les plus simples imposent des conditions de pression et de température nulles (polytrophe, modèle standard). Dans ce cas, le système différentiel possède une singularité en surface. En exigeant que les grandeurs physiques y restent régulières, on obtient les deux conditions aux limites

$$\begin{aligned}\frac{\delta P}{P} + \left(4 - \frac{R^3 s^2}{GM}\right) \frac{\delta r}{r} &= 0, \\ 4\frac{\delta r}{r} + 4\frac{\delta T}{T} - \frac{\delta L}{L} - \frac{\delta \kappa}{\kappa} &= 0.\end{aligned}$$

Si le modèle d'équilibre a été raccordé à un modèle d'atmosphère, on exigera que les perturbations du modèle d'intérieur se raccordent continûment aux perturbations du modèle d'atmosphère. Si la condition mécanique écrite ci-dessus s'avère relativement satisfaisante, la condition radiative peut au contraire être facilement améliorée. Admettons que la structure thermique de l'atmosphère puisse à tout instant être décrite par l'approximation d'Eddington

$$T^4 = \frac{3}{4}T_e^4\left(\tau + \frac{2}{3}\right) \approx \frac{3L}{16\pi r^2 \sigma}\left(\tau + \frac{2}{3}\right).$$

D'autre part

$$\tau = \int_r^\infty \kappa \rho dr \approx \frac{\kappa \Delta m}{4\pi r^2}.$$

On obtient alors

$$4\frac{\delta T}{T} + 2\frac{\delta r}{r} - \frac{\delta L}{L} - \frac{\tau}{\tau + 2/3} \left(\frac{\delta \kappa}{\kappa} - 2\frac{\delta r}{r}\right) = 0.$$

On remarquera qu'au cours de la pulsation, le niveau de la photosphère se déplace au travers de la matière. Il n'est donc pas correct de perturber directement l'équation

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4$$

et de l'appliquer au niveau correspondant à  $\tau = 2/3$  du modèle d'équilibre.

La recherche des modes d'oscillations radiales se ramène donc à la résolution d'un système différentiel du quatrième ordre aux conditions limites et aux valeurs propres.

## 7.2 Expressions intégrales

On peut tirer des équations que nous venons d'établir des expressions intégrales qui se révéleront particulièrement utiles dans la suite de l'exposé. Écrivons les équations de continuité, de mouvement et d'énergie sous les formes suivantes

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr} (r^2 \delta r) &= -r^2 \frac{\delta \rho}{\rho}, \\ \frac{d \delta P}{dr} + \left(\rho s^2 + \frac{4}{r} \frac{dP}{dr}\right) \delta r &= 0, \\ s c_v T \frac{\delta S}{c_v} &= \delta \epsilon - \frac{d \delta L}{dm}.\end{aligned}$$

Multiplions l'équation de mouvement par  $4\pi r^2 \overline{\delta r}$  et intégrons sur le rayon de l'étoile.

$$s^2 \int 4\pi r^2 \rho |\delta r|^2 dr + \int 4\pi r^2 \overline{\delta r} \left( \frac{d\delta P}{dr} + \frac{4}{r} \frac{dP}{dr} \delta r \right) dr = 0.$$

En utilisant l'équation de continuité et en intégrant par parties, on peut mettre cette équation sous la forme

$$s^2 \int |\delta r|^2 dm + \int \left\{ \frac{\delta P \overline{\delta \rho}}{\rho} + \frac{4r}{\rho} \frac{dP}{dr} \left| \frac{\delta r}{r} \right|^2 \right\} dm = 0.$$

Cette équation sera utilisée lors de l'étude de la stabilité vibrationnelle. Exprimons  $\delta P$  en termes de  $\delta \rho$  et de  $\delta S$ , puis exprimons  $\delta S$  à l'aide de l'équation de conservation de l'énergie.

$$s^2 \int |\delta r|^2 dm + \int \left\{ \frac{\Gamma_1 P}{\rho} \left| \frac{\delta \rho}{\rho} \right|^2 + \frac{4r}{\rho} \frac{dP}{dr} \left| \frac{\delta r}{r} \right|^2 \right\} dm + \frac{1}{s} \int (\Gamma_3 - 1) \frac{\overline{\delta \rho}}{\rho} \left( \delta \epsilon - \frac{d\delta L}{dm} \right) dm = 0.$$

Le terme indépendant de  $s$  peut prendre une autre forme intéressante. Développons le premier terme qui le compose comme suit.

$$\begin{aligned} \int \frac{\Gamma_1 P}{\rho} \left| \frac{\delta \rho}{\rho} \right|^2 dm &= \int \frac{4\pi \Gamma_1 P}{r^2} \left| \frac{d}{dr} (r^2 \delta r) \right|^2 dr = \dots \\ &= \int \left\{ 4\pi \Gamma_1 P r^4 \left| \frac{d}{dr} \left( \frac{\delta r}{r} \right) \right|^2 - 12\pi r^3 \left| \frac{\delta r}{r} \right|^2 \frac{d}{dr} (\Gamma_1 P) \right\} dr \\ &= \int \left\{ \frac{\Gamma_1 P r^2}{\rho} \left| \frac{d}{dr} \left( \frac{\delta r}{r} \right) \right|^2 - \frac{r}{\rho} \frac{d}{dr} (3\Gamma_1 P) \left| \frac{\delta r}{r} \right|^2 \right\} dm. \end{aligned}$$

Le terme indépendant de  $s$  s'écrit donc

$$\int \left\{ \frac{\Gamma_1 P r^2}{\rho} \left| \frac{d}{dr} \left( \frac{\delta r}{r} \right) \right|^2 - \frac{r}{\rho} \frac{d}{dr} [(3\Gamma_1 - 4)P] \left| \frac{\delta r}{r} \right|^2 \right\} dm.$$

On a ainsi obtenu l'équation cubique

$$s^3 + As + B = 0,$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \int \left\{ c^2 \left| \frac{\delta \rho}{\rho} \right|^2 - 4 \frac{Gm}{r^3} |\delta r|^2 \right\} dm / \int |\delta r|^2 dm \\ &= \int \left\{ c^2 r^2 \left| \frac{d}{dr} \left( \frac{\delta r}{r} \right) \right|^2 - \frac{r}{\rho} \frac{d}{dr} [(3\Gamma_1 - 4)P] \left| \frac{\delta r}{r} \right|^2 \right\} dm / \int |\delta r|^2 dm, \\ B &= \int (\Gamma_3 - 1) \frac{\overline{\delta \rho}}{\rho} \left( \delta \epsilon - \frac{d\delta L}{dm} \right) dm / \int |\delta r|^2 dm. \end{aligned}$$

### 7.3 Modes dynamiques et modes séculaires

On notera que la valeur propre intervient deux fois dans les coefficients des équations différentielles. Si nous écrivons ces deux occurrences sous leurs formes sans dimension, la première se présente dans l'équation de mouvement, sous la forme  $r^3 s^2 / Gm$  et la seconde, dans l'équation de conservation de l'énergie, sous la forme  $4\pi r^3 c_v \rho T s / L$ .

À chacune de ces occurrences est associée une famille de modes : les modes dynamiques et les modes séculaires. Les temps caractéristiques de ces modes sont donnés par les coefficients de  $s$  correspondants. Pour les modes dynamiques, le temps caractéristique est le temps dynamique et pour les modes séculaires, c'est le temps d'Helmholtz-Kelvin,

$$\sqrt{\frac{r^3}{Gm}} \approx \tau_{dyn}, \quad \frac{4\pi r^3 c_v \rho T}{L} \approx \tau_{HK}.$$

Ces affirmations sont justifiées par de nombreux calculs. Nous allons tâcher de les rendre plausibles en évaluant l'ordre de grandeur des racines de l'équation cubique qui vient d'être établie.

Évaluons l'ordre de grandeur des coefficients  $A$  et  $B$  en supposant que les fonctions propres sont du même ordre de grandeur (cette approximation repose sur l'expérience acquise lors de nombreuses intégrations numériques). On obtient

$$A \approx 1/\tau_{dyn}^2 \quad \text{et} \quad B \approx \frac{1}{\tau_{dyn}^2 \tau_{HK}}.$$

Nous poserons donc  $A = A'/\tau_{dyn}^2$  et  $B = B'/\tau_{dyn}^2 \tau_{HK}$ , où  $A'$  et  $B'$  sont des nombres sans dimension, de l'ordre de l'unité. L'équation cubique s'écrit

$$s'^3 + A's' + \alpha B' = 0,$$

où on a posé  $s = s'/\tau_{dyn}$  et  $\alpha = \tau_{dyn}/\tau_{HK} \ll 1$ . Il est facile de voir que cette équation a deux racines de l'ordre de l'unité, dont on obtient une approximation en faisant  $\alpha = 0$ ,

$$s' = \pm\sqrt{-A'}$$

et une racine de l'ordre de  $\alpha$  dont on obtient une approximation en négligeant le terme cubique ou en remarquant que le produit des racines est égal à  $-\alpha B'$ ,

$$s' = -\alpha B'/A'.$$

On obtient donc pour  $s$  deux racines de l'ordre de  $1/\tau_{dyn}$  et une racine de l'ordre de  $1/\tau_{HK}$ . Les deux premières racines sont associées à des perturbations dont le temps caractéristique d'évolution est le temps dynamique  $\tau_{dyn}$ . Ces modes sont appelés modes dynamiques. La troisième racine est associée à des perturbations qui évoluent plus lentement, à l'échelle de temps de Helmholtz-Kelvin. Ces modes sont appelés modes séculaires. Leur existence est liée au coefficient  $B$  qui contient tous les effets non adiabatiques.

Insistons sur la faiblesse de l'argument précédent. Les coefficients de l'équation cubique sont calculés à partir des fonctions propres qui sont inconnues et qui ne sont évidemment

pas les mêmes pour les modes dynamiques et pour les modes séculaires. Mais l'existence de deux types de modes radiaux peut encore être justifiée par d'autres procédés : analyse locale du système différentiel, utilisation d'un modèle simple tel que le modèle à une couche de Baker.

La distinction entre deux familles de modes peut généralement être faite sans ambiguïté. Il existe cependant des cas où des modes ne peuvent pas être attribués à l'une ou l'autre famille. Cette situation se présente lorsque le temps thermique devient du même ordre de grandeur que le temps dynamique (étoiles très lumineuses, modèles proches de l'instabilité dynamique).

## Références

La condition limite radiative en surface écrite ci-dessus a été obtenue par Baker et Kippenhahn (1965).

Nous avons utilisé une équation de diffusion pour décrire le transfert radiatif. Dans les couches extérieures de l'étoile, cette approximation peut se révéler insuffisante. L'approximation d'Eddington peut alors être utilisée. On consultera Unno et Spiegel (1966) ainsi que les commentaires de Christensen-Dalsgaard et Frandsen (1983) sur le sujet.

On doit à Ledoux (1963 et 1969) l'écriture de l'équation cubique en  $s$ .

Baker N., Kippenhahn R., 1965. The pulsations of models of delta Cephei stars II. *Astrophys J*, 142, 868–889.

Christensen-Dalsgaard J., Frandsen S., 1983. Radiative transfer and stellar oscillations. *Solar Phys*, 82, 165–204.

Ledoux P., 1963. Stellar stability and stellar evolution. In Gratton L. (edit.), *Evoluzione delle stelle*, Academic Press, 394–445.

Ledoux P., 1969. Oscillations et stabilité stellaires. In Joseph C., Janin G., Maeder A., Mayor M. (edit.), *La structure interne des étoiles*, XIème cours de perfectionnement de l'association vaudoise des chercheurs en physique, Saas-Fee, 44–211.

Unno W., Spiegel E.A., 1966. The Eddington approximation in the radiative heat equation. *Pub Astron Soc Japan*, 18, 85–95.



## Chapitre 8

# Oscillations radiales adiabatiques

Les périodes des modes dynamiques d'ordre pas trop élevé sont de l'ordre du temps dynamique et sont beaucoup plus courtes que le temps caractéristique des transferts d'énergie thermique. Cette remarque justifie, qu'en première approximation, on utilise l'approximation adiabatique pour l'étude de ces modes. Si cette étude met en évidence une instabilité, on dira que l'étoile est *dynamiquement instable*. Dans le cas contraire, l'étoile sera dite *dynamiquement stable*. Pour autant que la stabilité de l'étoile ne soit pas marginale, l'approximation adiabatique fournit les fréquences propres des modes normaux avec une excellente approximation. Les fonctions propres adiabatiques constituent également une bonne approximation, sauf dans les couches extérieures où l'approximation adiabatique n'est plus justifiée (le temps caractéristique thermique local cesse d'être long comparé au temps dynamique).

Ainsi qu'on l'a vu, de façon générale, l'hypothèse adiabatique conduit à un problème auto-adjoint où les valeurs propres  $s^2$  sont réelles. En cas de stabilité dynamique, on a donc  $s$  imaginaire pur. L'étude adiabatique ne permet donc pas de savoir si le mode calculé sera excité ou amorti. Cette question ne peut recevoir de réponse que si on prend en considération les termes non adiabatiques et relève du problème de la *stabilité vibrationnelle*, qui sera discuté au chapitre suivant.

Dans l'hypothèse adiabatique,  $\delta P/P$  et  $\delta\rho/\rho$  sont liés par

$$\frac{\delta P}{P} = \Gamma_1 \frac{\delta\rho}{\rho}.$$

On peut donc décrire le problème adiabatique radial par les équations différentielles

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left( \frac{\delta r}{r} \right) &= -\frac{1}{r} \left( 3 \frac{\delta r}{r} + \frac{1}{\Gamma_1} \frac{\delta P}{P} \right), \\ \frac{d}{dr} \left( \frac{\delta P}{P} \right) &= -\frac{1}{P} \frac{dP}{dr} \left\{ \frac{\delta P}{P} + \left( 4 - \frac{r^3 s^2}{Gm} \right) \frac{\delta r}{r} \right\}. \end{aligned}$$

et les conditions aux limites

$$\begin{aligned} 3 \frac{\delta r}{r} + \frac{1}{\Gamma_1} \frac{\delta P}{P} &= 0 \quad \text{en } r = 0, \\ \frac{\delta P}{P} + \left( 4 - \frac{R^3 s^2}{GM} \right) \frac{\delta r}{r} &= 0 \quad \text{en } r = R. \end{aligned}$$

Il est intéressant d'introduire des variables sans dimension. Nous poserons

$$x = \frac{r}{R}, \quad q = \frac{m}{M}, \quad \xi = \frac{\delta r}{r}, \quad \eta = \frac{\delta P}{P} \quad \text{et} \quad s = -i\sigma \quad \text{avec} \quad \sigma = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}\omega.$$

Il vient

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dx} &= -\frac{1}{x} \left( 3\xi + \frac{\eta}{\Gamma_1} \right), \\ \frac{d\eta}{dx} &= -\frac{d \ln P}{dx} \left\{ \eta + \left( 4 + \frac{x^3 \omega^2}{q} \right) \xi \right\}. \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned} 3\xi + \frac{\eta}{\Gamma_1} &= 0 \quad \text{en} \quad x = 0, \\ \eta + (4 + \omega^2)\xi &= 0 \quad \text{en} \quad x = 1. \end{aligned}$$

Considérons à présent deux configurations stellaires homologues. Soit  $\alpha = R'/R$  et  $\beta = M'/M$ . On peut établir entre les points des deux modèles une correspondance telle que

$$r' = \alpha r, \quad m' = \beta m, \quad \rho' = \alpha^{-3} \beta \rho, \quad P' = \alpha^{-4} \beta^2 P, \quad \dots$$

Dans une telle transformation homologue, les coefficients du système différentiel et des conditions limites sont invariants. Les deux modèles sont donc caractérisés par les mêmes valeurs des fréquences sans dimension

$$\omega' = \omega \quad \text{et} \quad \sigma' = \beta^{1/2} \alpha^{-3/2} \sigma.$$

Les périodes de pulsation des deux étoiles sont donc dans le même rapport que leurs temps dynamiques. En effet,

$$\tau'_{dyn} = \beta^{-1/2} \alpha^{3/2} \tau_{dyn}.$$

En éliminant  $\eta$ , on obtient l'équation différentielle

$$\frac{d}{dr} \left( \Gamma_1 P r^4 \frac{d\xi}{dr} \right) + \left\{ r^3 \frac{d}{dr} [(3\Gamma_1 - 4)P] + \sigma^2 \rho r^4 \right\} \xi = 0$$

et les conditions aux limites

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dr} &= 0 \quad \text{en} \quad r = 0, \\ \Gamma_1 R \frac{d\xi}{dr} + \left( 3\Gamma_1 - 4 - \frac{R^3 \sigma^2}{GM} \right) \xi &= 0 \quad \text{en} \quad r = R. \end{aligned}$$

Ce problème est du même type que le problème de Sturm-Liouville. Il admet donc une infinité dénombrable de valeurs propres qu'on peut numérotter de telle sorte que

$$\sigma_0^2 < \sigma_1^2 < \dots < \sigma_k^2 < \dots \quad \text{avec} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k^2 = +\infty.$$

La fonction propre  $\xi_k$  associée à  $\sigma_k$  admet  $k$  zéros dans l'intervalle  $]0, R[$ . On démontre également que les  $\xi_k$  forment un ensemble complet, c'est-à-dire une base dans l'espace des fonctions  $\xi$  décrivant une perturbation radiale.

Ecrivons l'équation différentielle sous la forme

$$\mathcal{L}\xi = \sigma^2\xi$$

avec

$$\mathcal{L}\xi = -\frac{1}{\rho r^4} \frac{d}{dr} \left( \Gamma_1 P r^4 \frac{d\xi}{dr} \right) - \frac{1}{\rho r} \frac{d}{dr} [(3\Gamma_1 - 4)P] \xi.$$

Cet opérateur est essentiellement le même que celui que nous avons introduit précédemment (il est changé de signe et porte sur  $\delta r/r$  au lieu de  $\overrightarrow{\delta r}$ ). On vérifiera, à titre d'exercice, qu'il est hermitien pour le produit scalaire

$$(u, v) = \int \rho r^4 u \bar{v} dr.$$

Les  $\sigma_k^2$  sont les valeurs stationnaires de la fonctionnelle

$$\Lambda(u) = \frac{(u, \mathcal{L}u)}{(u, u)}.$$

En particulier

$$\sigma_0^2 = \min_u \frac{(u, \mathcal{L}u)}{(u, u)}.$$

Si le modèle est stable dynamiquement, l'opérateur  $\mathcal{L}$  est défini positif et réciproquement.

En intégrant par parties, on peut écrire

$$(u, \mathcal{L}u) = \int \left\{ \Gamma_1 P r^4 \left| \frac{du}{dr} \right|^2 - r^3 |u|^2 \frac{d}{dr} [(3\Gamma_1 - 4)P] \right\} dr.$$

Supposons que  $\Gamma_1$  soit constant dans toute la masse de l'étoile. Il est clair que si  $\Gamma_1 > 4/3$ , pour tout  $u \neq 0$  on a  $(u, \mathcal{L}u) > 0$  et la stabilité dynamique est assurée. Par contre si  $\Gamma_1 < 4/3$ , il suffit de considérer  $u = \text{constante}$  pour montrer que  $\mathcal{L}$  n'est pas défini positif et par conséquent qu'il y a instabilité dynamique. Dans le cas où  $\Gamma_1 = 4/3$ , la stabilité dynamique est marginale. Le système admet alors la solution  $\sigma = 0$ ,  $\xi = 1$  et  $\eta = -4$  qui décrit une transformation homologue de l'étoile.

Supposons  $\Gamma_1 > 4/3$ . On a

$$\sigma_0^2 \leq \frac{(u, \mathcal{L}u)}{(u, u)}.$$

Prenons  $u = 1$ , il vient

$$\sigma_0^2 \leq -\frac{\int r^3 \frac{d}{dr} [(3\Gamma_1 - 4)P] dr}{\int \rho r^4 dr} = (3\Gamma_1 - 4) \frac{\int \frac{Gm}{r} dm}{\int r^2 dm} = (3\Gamma_1 - 4) \frac{GM}{R^3} \frac{\int \frac{q dq}{x}}{\int x^2 dq}.$$

On peut intégrer le second membre par parties et il vient

$$\sigma_0^2 \leq 3 \frac{3\Gamma_1 - 4}{\Gamma_1} \frac{\int c^2 dm}{\int r^2 dm} = 3 \frac{3\Gamma_1 - 4}{\Gamma_1} \frac{\bar{c}^2}{\bar{r}^2}.$$

On peut minorer  $\sigma_0^2$  de la manière suivante

$$\begin{aligned} (u, \mathcal{L}u) &= \int \Gamma_1 P r^4 \left| \frac{du}{dr} \right|^2 dr + (3\Gamma_1 - 4) \int G m \rho r |u|^2 dr \\ &\geq (3\Gamma_1 - 4) \frac{GM}{R^3} \int \frac{q}{x^3} \rho r^4 |u|^2 dr \geq (3\Gamma_1 - 4) \frac{GM}{R^3} \int \rho r^4 |u|^2 dr, \end{aligned}$$

car  $q/x^3 = \bar{\rho}(r)/\bar{\rho} > 1$ . On a ainsi

$$\sigma_0^2 = \min_u \frac{(u, \mathcal{L}u)}{(u, u)} \geq (3\Gamma_1 - 4) \frac{GM}{R^3}.$$

Si  $\Gamma_1$  n'est pas constant, on ne peut plus le faire sortir du signe d'intégration que sous la forme d'une certaine valeur moyenne  $\bar{\Gamma}_1$ .  $\Gamma_1$  peut alors être inférieur à  $4/3$  dans une zone limitée de l'étoile sans entraîner une instabilité dynamique radiale.

## 8.1 Énergie d'un mode

Prenons l'équation de mouvement sous la forme

$$\rho \frac{d^2 \delta r}{dt^2} = \frac{4Gm\rho}{r^3} \delta r - \frac{\partial \delta P}{\partial r},$$

multiplions-la par  $d \delta r / dt$

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} v^2 - \frac{2Gm}{r^3} \delta r^2 \right) = - \frac{\partial \delta P}{\partial r} \frac{d \delta r}{dt}.$$

Transformons le second membre

$$- \frac{\partial \delta P}{\partial r} \frac{d \delta r}{dt} = - \vec{v} \cdot \text{grad } \delta P = - \text{div}(\vec{v} \delta P) + \delta P \text{div } \vec{v},$$

puis

$$\delta P \text{div } \vec{v} = - \frac{\Gamma_1 P}{\rho} \delta \rho \frac{d \delta \rho}{dt} \frac{1}{\rho} = - \frac{1}{2} \rho c^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{\delta \rho}{\rho} \right)^2$$

et finalement

$$\frac{d}{dt} \left\{ \rho \left[ \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} c^2 \left( \frac{\delta \rho}{\rho} \right)^2 - 2 \frac{Gm}{r^3} (\delta r)^2 \right] \right\} = - \text{div}(\delta P \vec{v})$$

ou

$$\frac{d}{dt}(\rho \mathcal{E}) = - \text{div } \vec{\mathcal{F}}.$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}c^2\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)^2 - 2\frac{Gm}{r}\left(\frac{\delta r}{r}\right)^2$$

est l'énergie mécanique de la pulsation par unité de masse. Les trois termes qui la composent sont respectivement l'énergie cinétique, l'énergie potentielle acoustique et l'énergie potentielle gravifique.

Le vecteur

$$\vec{\mathcal{F}} = \delta P \vec{v}$$

est la densité de flux d'énergie.

Groupons les deux termes d'énergie potentielle

$$\mathcal{E}_P = \mathcal{E}_A + \mathcal{E}_G.$$

On a donc

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_P.$$

Si on explicite la dépendance temporelle sous la forme

$$\delta r(r, t) = \delta r(r) \cos \sigma t,$$

on voit que

$$\mathcal{E}_K(r, t) = \mathcal{E}_K(r) \sin^2 \sigma t \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_P(r, t) = \mathcal{E}_P(r) \cos^2 \sigma t.$$

Intégrons ces expressions sur toute la masse de l'étoile

$$\begin{aligned} E_K(t) &= \int \mathcal{E}_K(r, t) dm = E_K \sin^2 \sigma t, \\ E_P(t) &= \int \mathcal{E}_P(r, t) dm = E_P \cos^2 \sigma t, \\ E(t) &= \int \mathcal{E}(r, t) dm = E_K \sin^2 \sigma t + E_P \cos^2 \sigma t. \end{aligned}$$

En intégrant l'équation de conservation de l'énergie mécanique de la pulsation sur tout le volume de l'étoile, on obtient

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad E = \text{constante}.$$

Il en résulte que

$$E = E_K = E_P.$$

et

$$\overline{E_K(t)} = \overline{E_P(t)} = \frac{1}{2}E.$$

L'énergie totale de la pulsation peut s'écrire

$$E = \frac{\sigma^2}{2} \int \delta r^2 dm$$

où le  $\delta r$  sous le signe d'intégration est l'amplitude  $\delta r(r)$ .

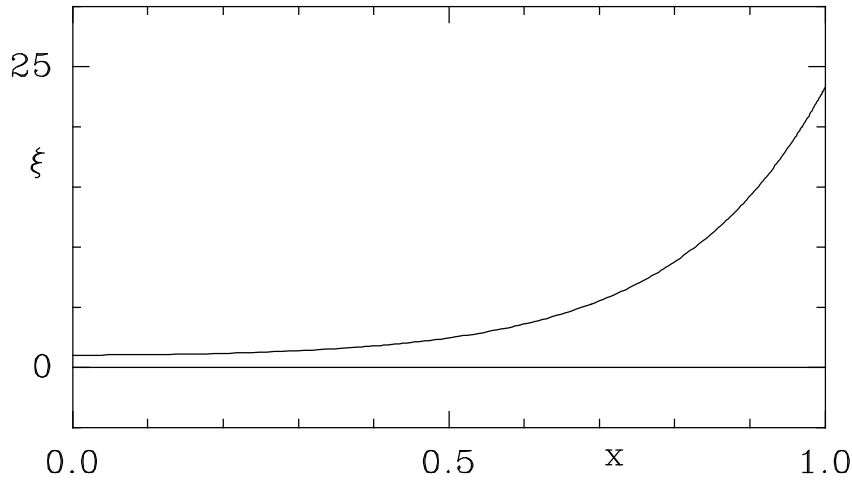


FIG. 8.1 – Mode fondamental d’oscillation radiale du modèle standard (polytrope d’indice 3).

## 8.2 Comportement des fonctions propres

Il est important d’avoir une idée du comportement des fonctions propres  $\xi_k$  pour un modèle dynamiquement stable. Les figures 8.1 à 8.3 montrent quelques fonctions propres d’oscillation radiale du modèle standard (polytrope d’indice 3). Les facteurs arbitraires qui interviennent dans leur définition ont été choisis de telle sorte que

$$(\xi_0, \xi_0) = (\xi_1, \xi_1) = \dots$$

de façon à permettre la comparaison d’un mode à l’autre.

On notera que l’amplitude croît en valeur absolue lorsqu’on s’approche de la surface et cela d’autant plus vite que le numéro du mode est élevé. Ceci est en accord avec le fait qu’en surface on a

$$\frac{d \ln |\xi|}{dx} = \frac{\omega^2 + 4 - 3\Gamma_1}{\Gamma_1} > 0.$$

Définissons la moyenne d’une grandeur  $X$  quelconque pondérée par l’énergie du  $k$ -ième mode de la façon suivante

$$\langle X \rangle = \frac{\int X r^2 \xi_k^2 dm}{\int r^2 \xi_k^2 dm}.$$

La valeur de  $\langle x \rangle$  ( $x = r/R$ ) permet alors de mesurer l’importance relative des régions centrales et des couches extérieures pour le mode considéré. Le tableau suivant donne quelques indications pour quelques modes radiaux du modèle standard.

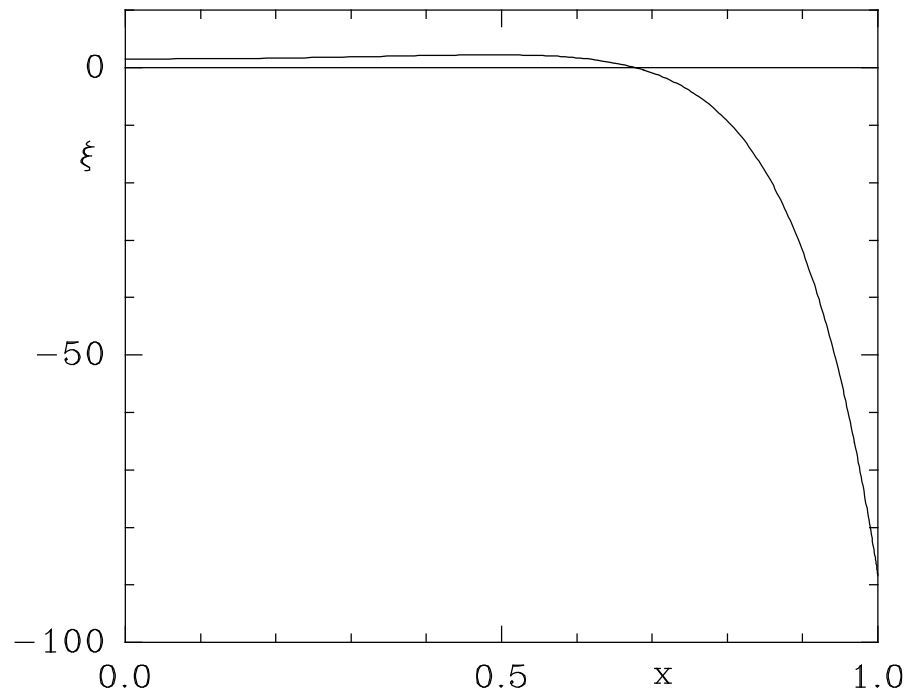


FIG. 8.2 – Premier harmonique d'oscillation radiale du modèle standard (polytrophe d'indice 3).

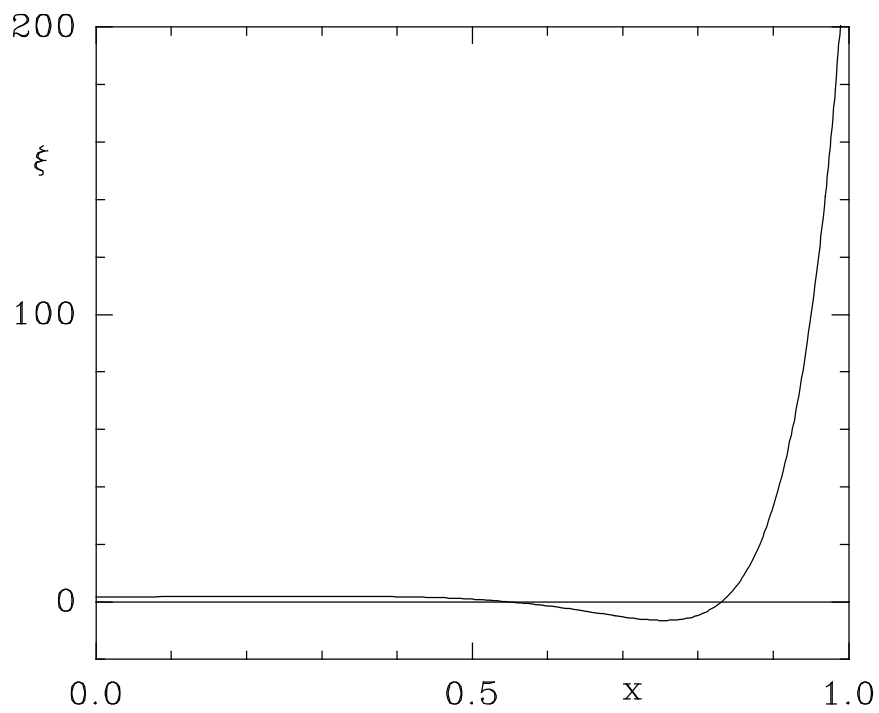


FIG. 8.3 – Deuxième harmonique d'oscillation radiale du modèle standard (polytrophe d'indice 3).

Mode	$\omega$	$\xi_s/\xi_c$	$\langle x \rangle$
0	3,04215	22,44	0,633
1	4,12123	-58,88	0,681
2	5,33690	135,3	0,715
...	...	...	...
9	14,16770	-1681	0,735

L'examen du tableau montre que les couches externes jouent un rôle plus important pour les harmoniques que pour le mode fondamental et cette importance croît avec le numéro du mode. Cette remarque ne s'applique pas seulement au modèle standard mais a une portée tout à fait générale.

Signalons aussi que le rapport d'amplitude entre la surface et le centre est d'autant plus élevé que la concentration du modèle ( $\rho_c/\bar{\rho}$ ) est élevée.

### 8.3 Quelques cas d'instabilité

À la frontière entre stabilité et instabilité dynamiques, le temps caractéristique du mode instable cesse d'être petit par rapport au temps caractéristique des modes séculaires. Dans cette situation, il est artificiel de vouloir distinguer entre instabilité dynamique et instabilité séculaire.

1) Dans les étoiles supermassives ( $M > 10^5 M_\odot$ ), la pression de rayonnement domine la pression gazeuse. En effet le rapport  $\beta$  de la pression gazeuse à la pression totale est donné par la relation approximative

$$\beta\mu = 4,28\sqrt{\frac{M_\odot}{M}}.$$

Or lorsque  $\beta$  est petit,  $\Gamma_1$  est proche de  $4/3$  et donné approximativement par

$$\Gamma_1 \approx \frac{4}{3} + \frac{\beta}{6}.$$

Pour des étoiles de cette masse, il est nécessaire de tenir compte des effets de relativité générale, de sorte que le critère de stabilité dynamique s'écrit

$$\Gamma_1 > \frac{4}{3} + 2,25\frac{GM}{Rc^2} \quad (c = \text{vitesse de la lumière}).$$

Il en résulte que les étoiles supermassives dont la masse est supérieure à une certaine masse critique située entre  $10^5$  et  $10^6 M_\odot$  sont dynamiquement instables.

2) Plusieurs effets concourent à déstabiliser dynamiquement les naines blanches très condensées. La dégénérescence relativiste des électrons abaisse  $\Gamma_1$  au voisinage de  $4/3$ . D'autre part, il s'instaure un équilibre entre la désintégration  $\beta$  et la capture d'électrons qui contribue aussi à l'abaissement de  $\Gamma_1$ . Enfin, les effets de relativité générale rendent le critère de stabilité plus difficile à satisfaire. Les configurations dont la densité centrale est



supérieure à une densité critique de l'ordre  $10^{10} \text{ g cm}^{-3}$  sont dynamiquement instables. Du côté des hautes densités, on ne retrouve des configurations stables qu'avec les étoiles de neutrons.

3) Dans les phases initiales de contraction d'une proto-étoile, du fait de la dissociation de  $\text{H}_2$  et de l'ionisation de H et de He, il n'y a pas de modèle d'équilibre dynamiquement stable et ces phases de l'évolution se déroulent à l'échelle de temps dynamique.

4) Dans les phases finales de l'évolution d'une étoile suffisamment massive, l'établissement d'un équilibre nucléaire (pic du fer) abaisse  $\Gamma_1$  et provoque une instabilité dynamique. C'est cette instabilité qui détermine les phases initiales d'une supernova.

5) Les énormes pertes de masse que subissent les variables de type S Dor (ou LBV) seraient dues à une instabilité dynamique qui affecte leur enveloppe. Dans ces étoiles massives et très lumineuses, la pression de rayonnement est élevée ( $\beta$  petit) et l'existence d'une zone d'ionisation partielle de l'hydrogène et de l'hélium suffit alors à abaisser la valeur moyenne de  $\Gamma_1$  au-dessous de la valeur critique.

## Références

On pourra consulter le livre de Ince (1956), chapitre 10, pour un exposé du problème de Sturm-Liouville et l'article de Beyer (1995) pour une démonstration rigoureuse des propriétés du spectre des oscillations radiales adiabatiques.

Beyer H.R., 1995. The spectrum of radial adiabatic stellar oscillations. *J Math Phys*, 36, 4815–4825.

Ince E.L., 1956. *Ordinary differential equations*. Dover.



## Chapitre 9

# Expression asymptotique des fréquences radiales

Nous avons vu plus haut que l'équation différentielle régissant les oscillations radiales adiabatiques pouvait se mettre sous la forme

$$\frac{d}{dr} \left( \Gamma_1 P r^4 \frac{d\xi}{dr} \right) + \left\{ r^3 \frac{d}{dr} [(3\Gamma_1 - 4)P] + \sigma^2 \rho r^4 \right\} \xi = 0.$$

Pour les modes d'ordre élevé, le terme en  $\sigma^2$  est le terme dominant du coefficient de  $\xi$ . Cette circonstance permet d'utiliser des méthodes asymptotiques pour obtenir une expression approchée des fréquences d'oscillation. Ces méthodes se présentent sous plusieurs variantes, plus ou moins complexes et plus ou moins rigoureuses. Nous nous contenterons d'une approche simple.

Effectuons le changement de variables

$$\tau = \int_0^r \frac{dr}{c} \quad \text{et} \quad w = r^2 (\Gamma_1 P \rho)^{1/4} \xi.$$

On notera que  $\tau$  est le temps nécessaire pour parcourir, à la vitesse du son, la distance séparant le point considéré du centre de l'étoile. L'équation différentielle se réduit à

$$\frac{d^2 w}{d\tau^2} + \left\{ \sigma^2 + \frac{1}{r (\Gamma_1 P \rho)^{1/2}} \frac{d}{d\tau} [(3\Gamma_1 - 4)P] - \frac{1}{r^2 (\Gamma_1 P \rho)^{1/4}} \frac{d^2}{d\tau^2} [r^2 (\Gamma_1 P \rho)^{1/4}] \right\} w = 0.$$

La solution doit satisfaire les conditions aux limites  $w(0) = w(\tau_R) = 0$ , où  $\tau_R = \tau(R)$ .

Pour les modes d'ordre élevé,  $\sigma^2$  est grand et on peut être tenté d'ignorer les autres termes du coefficient de  $w$ . Toutefois, ces termes sont singuliers au centre et à la surface, ils ne sont donc pas négligeables vis-à-vis de  $\sigma^2$  au voisinage de ces points. En l'absence de ces singularités, on simplifierait l'équation en

$$\frac{d^2 w}{d\tau^2} + \sigma^2 w = 0.$$

Les solutions satisfaisant les conditions aux limites sont de la forme

$$w_k \propto \sin \sigma_k \tau \quad \text{avec} \quad \sigma_k = \frac{k\pi}{\tau_R} \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$w_k$  possède  $k - 1$  noeuds dans l'intervalle  $]0, \tau_R[$ . En numérotant les modes de cette façon, il faut attribuer la valeur  $k = 1$  au mode fondamental,  $k = 2$  au premier harmonique, ... Cette façon de numérotter les modes sera justifiée lors de l'étude des modes non radiaux.

Pour prendre en compte l'effet des singularités, nous développerons deux approximations. La première prendra en compte la singularité centrale et la seconde la singularité à la surface. Nous raccorderons ensuite les deux solutions en un point à la fois éloigné du centre et de la surface.

## 9.1 Singularité au centre

La singularité provient du terme en la dérivée seconde par rapport à  $\tau$ . On peut écrire l'équation différentielle sous la forme

$$\frac{d^2 w}{d\tau^2} + \left[ \sigma^2 - \frac{2}{\tau^2} + f(\tau) \right] w = 0,$$

où  $f(\tau)$  est une fonction régulière de  $\tau$  en  $\tau = 0$ . Il est maintenant justifié d'omettre  $f(\tau)$  devant le terme en  $\sigma^2$  et le terme singulier. L'équation se ramène à une équation de Bessel en posant  $z = \sigma\tau$  et  $w = \sqrt{z}u(z)$ .

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{du}{dz} + \left( 1 - \frac{9}{4z^2} \right) u = 0.$$

La solution régulière en  $z = 0$  est donnée par la fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $3/2$ ,  $u(z) = J_{3/2}(z)$ . Nous noterons  $w'(\tau)$  la solution approximative ainsi obtenue. Elle est valable tant qu'on n'est pas trop proche de la surface, dont la singularité n'a pas été prise en compte. L'approximation asymptotique de  $J_{3/2}(z)$  pour  $z$  grand permet d'écrire pour  $w'(\tau)$ , pas trop près du centre

$$w'(\tau) \propto \sin\left(\sigma\tau - \frac{\pi}{2}\right).$$

## 9.2 Singularité à la surface

On peut décrire grossièrement la structure des couches superficielles à l'aide d'un indice polytropique effectif  $n_e$  tel que  $\rho \propto (R - r)^{n_e}$  et  $P \propto (R - r)^{n_e + 1}$ . Si ces couches sont convectives,  $n_e$  est égal à l'indice polytropique associé à la valeur de  $\Gamma_1$ , c'est-à-dire  $n_e = 1/(\Gamma_1 - 1)$ . Si les couches superficielles sont radiatives et si l'opacité est donnée par  $\kappa \propto \rho^r T^{-s}$ ,  $n_e$  est donné par  $n_e = (r + 3)/(s + 1)$ . On obtient aisément les relations suivantes

$$\tau_R - \tau \propto (R - r)^{1/2}, \quad \rho \propto (\tau_R - \tau)^{2n_e}, \quad P \propto (\tau_R - \tau)^{2n_e + 1}, \quad c \propto (\tau_R - \tau).$$

On peut alors écrire l'équation différentielle sous la forme

$$\frac{d^2 w}{d\tau^2} + \left[ \sigma^2 - \frac{n_e^2 - \frac{1}{4}}{(\tau_R - \tau)^2} + f(\tau) \right] w = 0,$$

où  $f(\tau)$  est une fonction régulière en  $\tau_R$ . En omettant ce terme et en posant  $z = \sigma(\tau_R - \tau)$  et  $w = \sqrt{z}u(z)$ , il vient

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{du}{dz} + \left(1 - \frac{n_e^2}{z^2}\right) u = 0,$$

dont la solution régulière est  $J_{n_e}(z)$ . On obtient ainsi une approximation  $w''(\tau)$  valable en dehors d'un voisinage du centre. En utilisant l'expression asymptotique de la fonction de Bessel pour  $z$  grand, on peut écrire pour  $w''(\tau)$ , pas trop près de la surface

$$w''(\tau) \propto \sin\left(\sigma\tau - \sigma\tau_R - \frac{\pi}{4} + \frac{n_e\pi}{2}\right).$$

### 9.3 Raccordement des deux solutions

On raccorde les deux solutions  $w'(\tau)$  et  $w''(\tau)$  en un point quelconque de validité des deux approximations. Il suffit d'exiger que la différence des phases des arguments du sinus soit un multiple de  $\pi$  et il vient

$$w_k(\tau) \propto \sin\left(\sigma_k\tau - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{avec} \quad \sigma_k = \left(k + \frac{n_e}{2} + \frac{1}{4}\right) \frac{\pi}{\tau_R} \quad \text{pour } k = 1, 2, 3, \dots$$

Vérifions que  $w_k(\tau)$  possède bien  $k - 1$  zéros dans l'intervalle  $]0, \tau_R[$ . Soit  $\tau^*$  un zéro quelconque de  $w_k$ . Nous supposons qu'il est le  $\ell$ -ème compté à partir du centre et le  $m$ -ème compté à partir de la surface;  $w_k$  a donc  $\ell + m - 1$  zéros. En utilisant l'expression asymptotique des zéros de  $J_\nu(z)$ , il vient

$$\sigma_k\tau^* = \left(\ell + \frac{1}{2}\right)\pi \quad \text{et} \quad \sigma_k(\tau_R - \tau^*) = \left(m + \frac{n_e}{2} - \frac{1}{4}\right)\pi.$$

En additionnant ces deux relations et en utilisant l'expression de  $\sigma_k$ , on obtient  $k = \ell + m$ , ce qui confirme que  $w_k$  possède bien  $k - 1$  zéros. Les modes sont donc numérotés par l'indice  $k$  de la même façon que plus haut, l'indice 1 étant attribué au mode fondamental, 2 au premier harmonique, ...

### 9.4 Bref rappel sur les fonctions de Bessel

Rappelons que la solution régulière en  $z = 0$  de l'équation de Bessel

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{du}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) u = 0$$

est la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre  $\nu$  qu'on note  $J_\nu(z)$ . Pour les grandes valeurs positives de  $z$ , elle peut être approximée de la façon suivante

$$J_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z + \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right)$$

et son  $k$ -ème zéro positif  $j_{\nu,k}$ , pour les grandes valeurs de  $k$ , est donné approximativement par

$$j_{\nu,k} \approx \left(k + \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}\right) \pi.$$

## Références

Le comportement asymptotique des oscillations radiales adiabatiques a été étudié par Ledoux (1962, 1963) sur la base de la méthode de Langer (1935). C'est essentiellement cette approche que nous avons suivie ici. Tassoul et Tassoul (1968) ont obtenu une approximation plus précise (du second ordre) en s'appuyant sur la méthode d'Olver (1956). Par un choix différent du grand paramètre, Ruymaekers et Smeyers (1991) ont amélioré les approximations précédentes.

Langer R.E., 1935. On the asymptotic solutions of ordinary differential equations, with reference to the Stokes phenomenon about a singular point. *Trans Am Math Soc*, 37, 397–416.

Ledoux P., 1962. Sur la forme asymptotique des pulsations radiales adiabatiques d'une étoile. I. *Bull Acad Roy Belg, Cl des Sci*, 5e série, 48, 240–254.

Ledoux P., 1963. Sur la forme asymptotique des pulsations radiales adiabatiques d'une étoile. II. Comportement asymptotique des amplitudes. *Bull Acad Roy Belg, Cl des Sci*, 5e série, 49, 286–302.

Olver F.W.J., 1956. The asymptotic solution of linear differential equations of the second order in a domain containing one transition point. *Phil Trans Roy Soc London, A*, 249, 65–97.

Ruymaekers E., Smeyers P., 1991. Second-order asymptotic approximation for radial oscillations of a gaseous star. *Astron Astrophys*, 241, 142–452.

Tassoul M., Tassoul J.-L., 1968. Asymptotic approximations for stellar pulsations. *Ap J*, 153, 127–133.

# Chapitre 10

## Stabilité vibrationnelle

Considérons un modèle stellaire dynamiquement stable. L'approximation adiabatique permet de calculer les fréquences des modes normaux d'oscillation mais elle ne permet pas de savoir si le mode calculé sera amorti ou excité par les phénomènes thermiques. Nous souhaiterions également connaître les mécanismes d'excitation d'un mode observé dans une étoile variable. Pour obtenir ce type d'information, nous devons prendre en considération les termes non adiabatiques et résoudre le système différentiel du quatrième ordre.

Nous avons établi précédemment la relation

$$s^2 \int |\delta r|^2 dm + \int \left\{ \frac{\delta P}{\rho} \frac{\overline{\delta \rho}}{\rho} + \frac{4r}{\rho} \frac{dP}{dr} \left| \frac{\delta r}{r} \right|^2 \right\} dm = 0.$$

Prenons la partie imaginaire de cette relation

$$2 \Re s \Im s = - \frac{\Im \int \frac{\delta P}{\rho} \frac{\overline{\delta \rho}}{\rho} dm}{\int |\delta r|^2 dm}.$$

Nous avons vu précédemment que l'expression figurant au dénominateur est liée à l'énergie mécanique de l'oscillation. Le numérateur a également une interprétation physique simple. Considérons un gramme de matière subissant un cycle thermodynamique de période  $\tau$  décrit par les équations

$$\begin{aligned} P(t) &= P_0 + a \cos(\phi - \sigma t), \\ \rho(t) &= \rho_0 + b \cos(\psi - \sigma t). \end{aligned}$$

Ce que nous pouvons également écrire, avec les conventions habituelles,

$$\begin{aligned} \delta P(t) &= \delta P e^{-i\sigma t} & (\delta P = a e^{i\phi}), \\ \delta \rho(t) &= \delta \rho e^{-i\sigma t} & (\delta \rho = b e^{i\psi}). \end{aligned}$$

Le travail effectué par le système au cours du cycle s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \oint P dV = \int_0^\tau P \frac{dV}{dt} dt = - \int_0^\tau \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} dt \\ &= \frac{\pi ab}{\rho^2} \sin(\phi - \psi) = \pi \Im \left( \frac{\delta P}{\rho} \frac{\overline{\delta \rho}}{\rho} \right). \end{aligned}$$

La puissance moyenne du cycle thermodynamique s'écrit donc

$$\mathcal{W} = \frac{\mathcal{T}}{\tau} = \frac{\sigma}{2} \Im \left( \frac{\delta P}{\rho} \frac{\overline{\delta \rho}}{\rho} \right).$$

Soit à présent  $W = \int \mathcal{W} dm$  la puissance moyenne développée par toute l'étoile. On a

$$\Im \int \frac{\delta P}{\rho} \frac{\overline{\delta \rho}}{\rho} dm = \frac{2}{\sigma} W.$$

On peut transformer le numérateur comme il a été fait plus haut pour obtenir l'équation cubique en  $s$ . Plus simplement, on peut utiliser l'équation cubique sous la forme

$$s^2 + A + \frac{1}{s} B = 0.$$

Prenons-en la partie imaginaire, il vient

$$2 \Re s \Im s = - \frac{\Im \frac{1}{s} \int (\Gamma_3 - 1) \frac{\overline{\delta \rho}}{\rho} \left( \delta \epsilon - \frac{d \delta L}{dm} \right) dm}{\int |\delta r|^2 dm}$$

## 10.1 L'approximation quasi-adiabatique

En général l'approximation adiabatique est excellente dans les couches internes de l'étoile et n'est en défaut que dans les couches externes. Considérons donc les termes non conservatifs comme de petites perturbations au problème adiabatique. On peut alors obtenir des corrections à la fonction propre et à la valeur propre  $s$  par une méthode de perturbation. Comme il nous intéresse surtout de savoir si le mode considéré est excité ou amorti par les termes non conservatifs, c'est la partie réelle de  $s$  qui nous intéresse. On peut l'obtenir très simplement à partir des expressions établies plus haut, en portant dans le second membre les solutions adiabatiques.

Ecrivons  $s = \sigma' - i\sigma$ , nous appellerons  $\sigma'$  coefficient d'amplification (ou  $-\sigma'$  coefficient d'amortissement). Il vient

$$\sigma' = \frac{1}{2\sigma^2} \frac{\int \frac{\delta T}{T} \left( \delta \epsilon - \frac{d \delta L}{dm} \right) dm}{\int |\delta r|^2 dm}.$$

Cette expression trouve une justification physique simple. Rappelons que

$$W = \frac{\sigma}{2} \Im \int \frac{\delta P}{\rho} \frac{\overline{\delta \rho}}{\rho} dm = \frac{1}{2} \int \frac{\delta T}{T} \left( \delta \epsilon - \frac{d \delta L}{dm} \right) dm,$$

$$E = \frac{\sigma^2}{2} \int |\delta r|^2 dm,$$



de sorte qu'on obtient

$$\sigma' = \frac{W}{2E}.$$

Ce résultat se justifie comme suit. Si l'amplitude de l'oscillation croît exponentiellement comme  $e^{\sigma't}$ , son énergie croît comme  $e^{2\sigma't}$ . On a alors

$$2\sigma' = \frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = \frac{W}{E}.$$

Un intérêt évident de l'expression intégrale du coefficient d'amplification provient de l'interprétation que nous avons faite de son numérateur. D'une part, le rôle excitateur ou inhibiteur de chaque couche de l'étoile peut être précisé. Si elle apporte une contribution positive (négative) à l'intégrale elle a une influence excitatrice (inhibitrice) sur l'oscillation. D'autre part, cette expression permet de préciser le mécanisme excitateur ou inhibiteur (de l'attribuer au terme de transfert ou au terme de génération d'énergie).

L'approximation quasi-adiabatique souffre toutefois d'un grave problème. Les fonctions propres adiabatiques utilisées pour calculer l'intégrale ne constituent pas une approximation valable dans les couches extérieures. On a l'habitude de définir une zone de transition par la relation

$$c_v T \Delta m \approx L \tau$$

où  $\tau$  est la période et  $\Delta m$  la masse située au-dessus du niveau considéré.  $c_v T \Delta m$  est de l'ordre de grandeur de l'énergie interne des couches surmontant le niveau considéré.  $L \tau$  est l'énergie rayonnée en une période. On distingue alors trois zones dans l'étoile

- 1°) une zone interne adiabatique où  $c_v T \Delta m \gg L \tau$ . L'approximation adiabatique y est très bonne.
- 2°) la zone de transition
- 3°) une zone externe, fortement non adiabatique où  $c_v T \Delta m \ll L \tau$ . Dans cette zone, écrivons l'équation de conservation d'énergie thermique sous la forme approximative

$$\frac{\Delta \delta L}{\Delta m} = -s c_v T \frac{\delta S}{c_v}$$

La variation de  $\delta L/L$  dans cette zone s'écrit

$$\Delta \frac{\delta L}{L} = -\frac{s c_v T \Delta m}{L} \frac{\delta S}{c_v}$$

Le coefficient du second membre est très petit. On peut donc en conclure que la capacité calorifique de ces couches superficielles est trop faible pour influencer  $\delta L$ , qui est à peu près constant à travers toute cette zone. Cette affirmation doit toutefois être nuancée lorsqu'un élément abondant est partiellement ionisé, car le phénomène d'ionisation est encore capable d'absorber ou de libérer des quantités appréciables d'énergie.

Vu sa faible capacité calorifique, la zone fortement non adiabatique ne peut pas influencer beaucoup l'excitation ou l'amortissement de l'oscillation. Cependant, le  $\delta L$  calculé à partir de l'approximation adiabatique croît fortement dans les couches extérieures de l'étoile. Ce désaccord entre le comportement réel de  $\delta L$  et le comportement déduit de l'approximation

adiabatique est de nature à fausser le résultat du calcul quasi-adiabatique. On y remédie souvent en excluant la zone fortement non adiabatique du domaine d'intégration.

$$\int_0^M \frac{\delta T}{T} \left( \delta \epsilon - \frac{d \delta L}{dm} \right) dm \longrightarrow \int_0^{m^*} \frac{\delta T}{T} \left( \delta \epsilon - \frac{d \delta L}{dm} \right) dm.$$

On prend souvent comme critère d'arrêt de l'intégration l'égalité

$$\left| \frac{\delta T}{T} \right|_{ad} = \left| \frac{\delta T}{T} \right|_{nonad}$$

avec

$$\left| \frac{\delta T}{T} \right|_{ad} = (\Gamma_3 - 1) \left| \frac{\delta \rho}{\rho} \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\delta T}{T} \right|_{nonad} = \left| \frac{\delta S}{c_v} \right| = \frac{1}{\sigma c_v T} \left| \frac{d \delta L}{dm} \right|.$$

Il faut reconnaître que ce procédé est assez brutal. Lorsque le mécanisme d'excitation est situé dans les régions centrales de l'étoile, on peut légitimement espérer obtenir un résultat significatif. La situation est plus délicate lorsque le mécanisme d'excitation réside dans les couches extérieures de l'étoile (dans la zone de transition par exemple). Il est alors plus prudent d'intégrer le système complet d'équations plutôt que d'utiliser l'approximation quasi-adiabatique.

Dans le cas où on intègre directement les équations non adiabatiques le coefficient de  $\delta S/c_v$  dans l'équation d'énergie thermique est très grand dans les couches internes de l'étoile, et cela peut causer quelques problèmes pour l'intégration numérique. Ils ne sont toutefois pas insurmontables. Une autre difficulté provient de la petitesse de  $\sigma'$  comparé à  $\sigma$ , le coefficient d'amplification risque de ce fait d'être évalué de façon peu précise. On améliorera alors la précision de  $\sigma'$  en utilisant l'expression intégrale dans laquelle on aura porté les fonctions propres du problème non adiabatique.

## 10.2 L'excitation nucléaire

Le terme nucléaire a toujours une influence excitatrice sur la pulsation. La génération d'énergie nucléaire se produit généralement dans les couches internes de l'étoile, là où l'approximation adiabatique est excellente. La contribution nucléaire au numérateur du coefficient d'amplification s'écrit

$$\int \frac{\delta T}{T} \delta \epsilon dm = \int (\Gamma_3 - 1) [\epsilon_\rho + (\Gamma_3 - 1) \epsilon_T] \left( \frac{\delta \rho}{\rho} \right)^2 \epsilon dm > 0.$$

Pour les étoiles de la séquence principale,  $\epsilon$  décroît très vite à partir du centre. Seules les régions centrales participent à cette influence déstabilisatrice. Nous avons vu que les fonctions propres sont généralement petites dans les régions centrales, cela est défavorable à l'influence excitatrice des réactions nucléaires qui est en compétition avec l'effet généralement inhibiteur des termes de transfert (voir plus loin).

Ce mécanisme d'excitation reposant sur la génération d'énergie nucléaire est appelé mécanisme  $\epsilon$ .

Pour les étoiles massives de la séquence principale, la pression de rayonnement est plus importante et  $\Gamma_1$  plus proche de  $4/3$ . Cela a pour effet de rendre les fonctions propres moins rapidement croissantes vers l'extérieur (pour  $\Gamma_1 = 4/3$ , on a  $\delta r/r = \text{constante}$ ). Cette situation est plus favorable au développement d'une instabilité vibrationnelle d'origine nucléaire. Le calcul confirme en effet que les étoiles de séquence principale de masse supérieure à une certaine masse critique sont vibrationnellement instables. La valeur précise de la masse critique dépend de la composition chimique et des lois d'opacité et de génération d'énergie utilisées. Elle va de  $90 M_\odot$  pour les étoiles pauvres en métaux à  $120\text{--}150 M_\odot$  pour les étoiles de population I (Stothers, 1992). Toutefois, ces étoiles subissent une instabilité plus violente associée aux modes étranges (voir plus loin).

### 10.3 L'influence du terme de transfert

La contribution du terme de transfert au numérateur de l'expression de  $\sigma'$  s'écrit

$$-\int \frac{\delta T}{T} \frac{d\delta L}{dm} dm = -\int \frac{\delta T}{T} \frac{d\delta L}{dr} dr.$$

$-\frac{\delta T}{T} \frac{d\delta L}{dm}$  est positif (effet déstabilisant) si  $\delta L$  décroît vers l'extérieur lorsque  $\delta T > 0$ , c'est-à-dire si la matière absorbe la chaleur à haute température et la restitue à basse température. C'est la condition habituelle de fonctionnement d'un moteur thermodynamique.

Etant donné la croissance rapide des fonctions propres vers l'extérieur, ce sont les couches extérieures qui auront le plus de poids dans l'intégrale et plus exactement la zone de transition. Rappelons toutefois que, dans les couches les plus extérieures,  $\delta L$  tend à devenir constant (sauf si un élément abondant est partiellement ionisé).

Essayons d'estimer le signe de la contribution du terme de transfert, là où l'approximation adiabatique a encore un sens. On a

$$\frac{\delta T}{T} \approx (\Gamma_3 - 1) \frac{\delta \rho}{\rho}$$

et de l'équation de transfert on tire

$$\frac{\delta L}{L} = \frac{\frac{d(\delta T/T)}{dr}}{\frac{d \ln T}{dr}} + 4 \frac{\delta r}{r} + 4 \frac{\delta T}{T} - \frac{\delta \kappa}{\kappa}.$$

Pour les modes d'ordre peu élevé, on peut négliger le terme en la dérivée de  $\delta T/T$  et le terme en  $\delta r/r$ , on obtient

$$\frac{\delta L}{L} \approx [(4 - \kappa_T)(\Gamma_3 - 1) - \kappa_\rho] \frac{\delta \rho}{\rho}.$$

Dans des conditions courantes (entre autres, loi d'opacité de Kramers), on a

$$\Gamma_3 \approx 5/3, \quad \kappa_\rho \approx 1, \quad \kappa_T \approx -3, 5.$$

TAB. 10.1 – Rapport entre le temps d’amplification et la période pour quelques types de variables.

Type de variables	$\tau'/\tau$
Céphéides classiques et RR Lyrae	$10^2$ à $10^3$
$\delta$ Sct	$10^4$ à $10^6$
W Vir	10 à 20
variables à longue période (Mira)	1 à 10

Il vient donc

$$[(4 - \kappa_T)(\Gamma_3 - 1) - \kappa_\rho] \approx 4 > 0.$$

$\delta L/L$  est donc du même signe que  $\delta\rho/\rho$  et  $\delta T/T$  et croît en valeur absolue. Il en résulte que

$$-\frac{\delta T}{T} \frac{d\delta L}{dr} < 0,$$

ce qui montre que les termes de transfert ont généralement un effet stabilisant.

Pour que les termes de transfert aient un effet excitateur, il faut changer le signe du coefficient. On voit que cela peut se produire si l’une des conditions suivantes est satisfaite.

- 1°) Si  $\Gamma_3 - 1$  est assez petit. Cette circonstance peut se présenter dans une zone où un élément abondant est partiellement ionisé.
- 2°) Si  $\kappa_T$  est positif, ce qui se produit dans les couches extérieures, à cause de la présence de l’ion  $H^-$ .

Ce mécanisme d’excitation reposant sur l’augmentation de l’opacité lors de la compression adiabatique est appelé mécanisme  $\kappa$ . On l’appelle parfois aussi mécanisme  $\gamma$  quand on veut insister sur le rôle joué par l’abaissement de  $\Gamma_3 - 1$  dans la zone excitatrice.

Une instabilité vibrationnelle due aux termes de transfert et ayant pour siège une zone où un élément abondant est partiellement ionisé explique la variabilité d’un certain nombre d’étoiles variables intrinsèques. Le mécanisme siège dans la zone de deuxième ionisation partielle de l’hélium ( $He^+ \rightleftharpoons He^{++}$ ) pour les variables de la bande d’instabilité : RR Lyr,  $\delta$  Cep, W Vir, RV Tau,  $\delta$  Sct. Dans le cas des variables de type Mira, l’ionisation partielle de l’hydrogène ( $H \rightleftharpoons H^+$ ) serait responsable de l’instabilité et dans le cas des variables de type  $\beta$  Cep c’est l’accroissement d’opacité dû au fer vers 200000 K qui en est la cause.

La table 1 donne l’ordre de grandeur du rapport entre la période  $\tau$  et le temps d’amplification  $\tau' = 1/\sigma'$ .

## 10.4 Les modes étranges

Cette appellation désigne des modes dynamiques découverts initialement dans des modèles stellaires très lumineux et dont le comportement a intrigué certains spécialistes. C’est ainsi que dans des modèles massifs (50 à 150  $M_\odot$ ) de séquence principale, le long d’une série

linéaire où le paramètre de contrôle est la masse, les fréquences des modes étranges évoluent différemment de celles des autres modes. Aux points où les fréquences des modes étranges devraient croiser les fréquences des modes réguliers, on observe soit un évitement du croisement (*avoided crossing* en anglais) soit le développement d'une instabilité (les deux modes dont les fréquences se croisent acquièrent des  $\Re$ s de signes opposés). Dans nombre de cas, les modes étranges sont fortement non adiabatiques et leur apparition semble être liée à l'existence d'une pression de rayonnement bien plus grande que la pression gazeuse et d'une inversion de densité dans une zone convective extérieure. L'énergie de la pulsation est confinée dans une petite région incluant et surmontant l'inversion de densité (mode piégé). Dans les étoiles massives de la séquence principale, ces modes sont responsables d'une instabilité pour des masses supérieures à une masse critique qui va de  $60 M_{\odot}$  pour  $Z = 0,03$  à plus de  $120 M_{\odot}$  pour les étoiles pauvres en métaux.

Ces modes étranges seraient également responsables des instabilités violentes qui affectent les variables LBV. On en a également trouvé dans les étoiles déficientes en hydrogène, dans les supergéantes de faible masse, dans les étoiles centrales des nébuleuses planétaires, dans les étoiles de Wolf-Rayet et même dans les céphéides.

Buchler et al. (1997) ont montré qu'on pouvait trouver des modes étranges dans des situations faiblement non adiabatiques (céphéides) et que leur comportement pouvait s'expliquer en termes mécaniques simples. Les équations de pulsation peuvent se mettre sous une forme analogue à l'équation de Schrödinger. Les étoiles où apparaissent des modes étranges se caractérisent par l'existence d'une barrière de potentiel (potentiel doit être compris comme un terme jouant dans l'équation de Schrödinger le même rôle qu'un potentiel) qui permet de piéger des modes (les modes étranges) dans les couches extérieures de l'étoile. Le piégeage des modes étranges explique les particularités de leur comportement. On trouvera un autre point de vue et une bibliographie assez détaillée dans l'article de Saio et al. (1998).

## Références

Notre discussion supposait le modèle en équilibre thermique. Or dans certaines phases de l'évolution stellaire, l'équilibre thermique de l'étoile n'est plus assuré et une partie notable de l'énergie rayonnée provient de la contraction gravifique. Le lecteur intéressé par la stabilité vibrationnelle d'une étoile dans ces phases d'évolution pourra consulter les articles de Demaret (1974ab, 1975ab, 1976) et Demaret et Perdang (1977).

Buchler J.R., P.A. Yecko, Z. Kolláth, 1997. The nature of strange modes in classical variable stars. *Astron Astrophys*, 326, 669–681.

Demaret J., 1974a. Vibrational stability of stars in thermal imbalance : a solution in terms of asymptotic expansions. *Bull Acad Roy de Belgique, Cl des Sciences*, 5e série, 60, 183–190.

Demaret J., 1974b. Vibrational stability of stars in thermal imbalance : a solution in terms of asymptotic expansions. I. Isentropic oscillations. *Astrophys Space Sci*, 31, 305–331.

Demaret J., 1975a. Vibrational stability of stars in thermal imbalance : a solution in terms of asymptotic expansions. II. The general non-isentropic oscillations. *Astrophys Space Sci*, 33, 189–213.

- Demaret J., 1975b. Vibrational stability of stars in thermal imbalance. In Phénomènes hydrodynamiques dans les étoiles, 19e colloque international d'astrophysique de Liège, Mém Soc Roy Sci de Liège, 6e série, 8, 161–171.
- Demaret J., 1976. Vibrational stability of stars in thermal imbalance. III. A general discussion of energy methods. *Astrophys Space Sci*, 45, 31–45.
- Demaret J., Perdang J., 1977. Vibrational stability of stars in thermal imbalance. IV. Towards a definition of vibrational stability. *Astrophys Space Sci*, 52, 137–167.
- Saio H., Baker N.H., Gautschi A., 1998. On the properties of strange modes. *Mon Not Roy Astr Soc*, 294, 622–634.
- Stothers R.B., 1992. Upper limit of the mass of pulsationally stable stars with uniform chemical composition. *Astrophys J*, 392, 706–709.

# Chapitre 11

## Le mécanisme de pulsation dans la bande d'instabilité et le retard de phase de la lumière

Les calculs de stabilité de modèles stellaires dans la bande d'instabilité donnent un accord plus ou moins satisfaisant avec les observations. Ils montrent que dans la bande d'instabilité, le mode radial fondamental ou le premier harmonique sont vibrationnellement instables. Cette instabilité vibrationnelle a pour siège la région de l'enveloppe où l'hélium subit sa deuxième ionisation. La zone d'ionisation de l'hydrogène, qui coïncide grossièrement avec la zone de première ionisation de l'hélium, contribue également, mais dans une plus faible mesure, à l'instabilité.

Les calculs prédisent correctement la position de la limite bleue (c'est-à-dire la limite gauche dans le diagramme HR, du côté des hautes températures) de la bande d'instabilité, mais ils échouent quant à la limite rouge. Cela provient du fait que lorsque la température effective est élevée, la convection transporte peu d'énergie, alors qu'à température effective plus basse, le transport d'énergie par convection joue un rôle important. L'absence d'une théorie satisfaisante de la convection en présence de pulsation suffit probablement à expliquer l'échec de la détermination de la limite droite de la bande d'instabilité.

La théorie rend compte également de la relation période-luminosité à laquelle obéissent les céphéides et dont l'usage dans l'estimation des distances stellaires est bien connu. Cette relation se prolonge même aux variables  $\delta$  Sct, comme l'illustre la figure 11.1.

### 11.1 Existence de l'instabilité

On doit à Cox (1967) une interprétation simple de l'existence de la bande d'instabilité.

L'ionisation d'un élément abondant a pour effet d'abaisser  $\Gamma_3 - 1$  (figure 11.2) et cela est favorable à une instabilité vibrationnelle due au terme de transfert. Revenons sur cet argument avec un peu plus de détails. Nous avons établi que, dans l'approximation quasi-adiabatique,

$$\frac{\delta L}{L} \approx [(\Gamma_3 - 1)(4 - \kappa_T) - \kappa_\rho] \frac{\delta \rho}{\rho}.$$

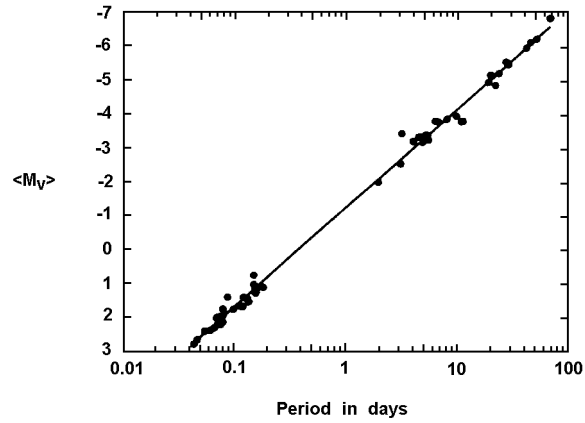


FIG. 11.1 – Diagramme période-luminosité de céphéides et de variables  $\delta$  Set pulsant dans le mode fondamental (Fernie, 1992).

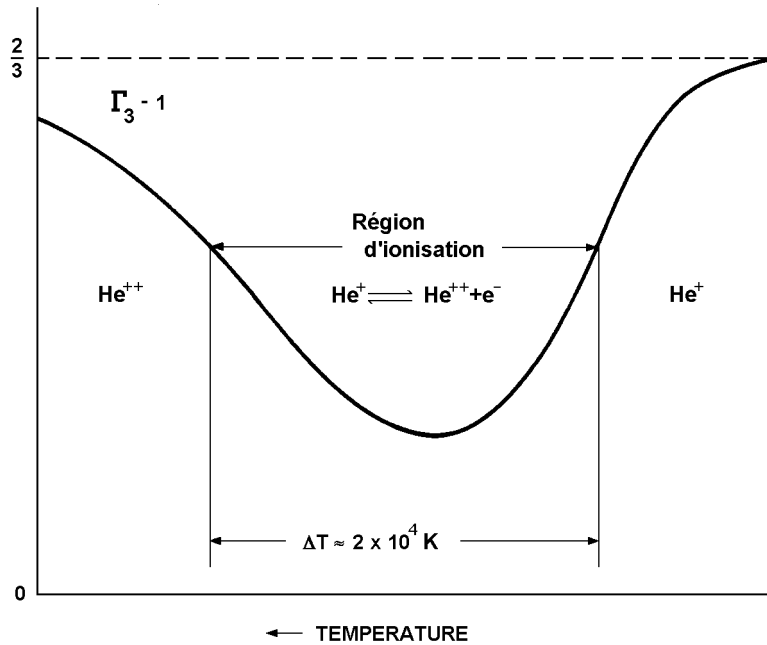


FIG. 11.2 – Comportement de  $\Gamma_3 - 1$  dans la région d'ionisation de  $\text{He}^+$  d'un modèle d'enveloppe stellaire (Cox, 1967).



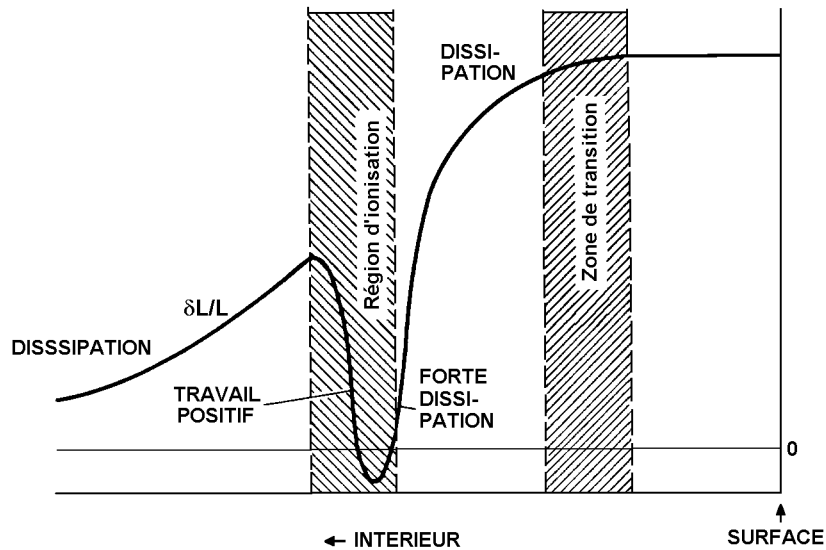


FIG. 11.3 – Comportement de  $\delta L/L$  dans les couches superficielles d'un modèle stellaire (Cox, 1967).

Si la zone d'ionisation se situe dans la zone adiabatique de l'étoile, à la compression,  $\delta L/L$  aura l'allure décrite à la figure 11.3. Dans la partie interne de la zone d'ionisation  $\delta L$  décroît à la compression. Cette zone absorbe donc de la chaleur à haute température et effectue un travail positif. Cet effet déstabilisant est cependant compensé dans la partie externe de la zone d'ionisation, dans laquelle on peut tenir le raisonnement inverse. Une zone d'ionisation située dans la zone adiabatique de l'étoile est donc incapable de provoquer une instabilité vibrationnelle.

Une zone d'ionisation située dans la zone fortement non adiabatique est également incapable de provoquer une instabilité vibrationnelle car  $\delta L$  est pratiquement constant dans ces couches extérieures de faible capacité calorifique (figure 11.4).

La situation la plus favorable pour le développement de l'instabilité vibrationnelle se produit quand la zone d'ionisation coïncide avec la zone de transition. Si la pulsation cesse d'être approximativement adiabatique dans la partie externe de la zone d'ionisation,  $\delta L$  tendra à y devenir indépendant de  $r$  et le travail positif effectué dans la partie interne de la zone d'ionisation ne sera plus compensé (figure 11.5).

Le calcul détaillé confirme cette interprétation. La bande d'instabilité est le lieu, dans le diagramme HR, de coïncidence entre la zone de transition et la zone de seconde ionisation de l'hélium. À gauche de la bande d'instabilité, pour des températures effectives plus élevées, cette zone d'ionisation se trouve dans la région fortement non adiabatique. À droite de la bande d'instabilité, pour des températures effectives plus basses, cette zone d'ionisation se trouve dans la région adiabatique. La zone d'ionisation de l'hydrogène vient alors en coïncidence avec la zone de transition mais le rôle important de la convection dans le transfert de l'énergie complique le phénomène.

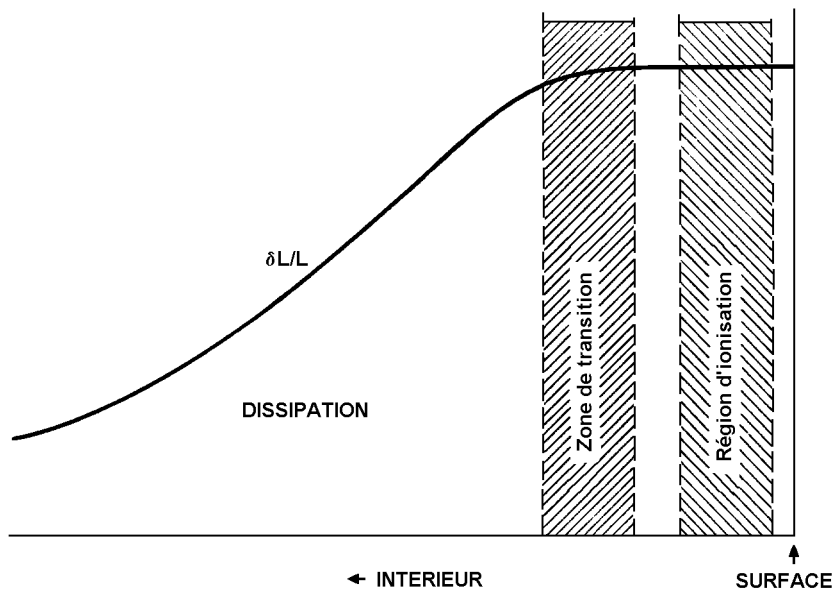


FIG. 11.4 – Comportement de  $\delta L/L$  dans les couches superficielles d'un modèle stellaire (Cox, 1967).

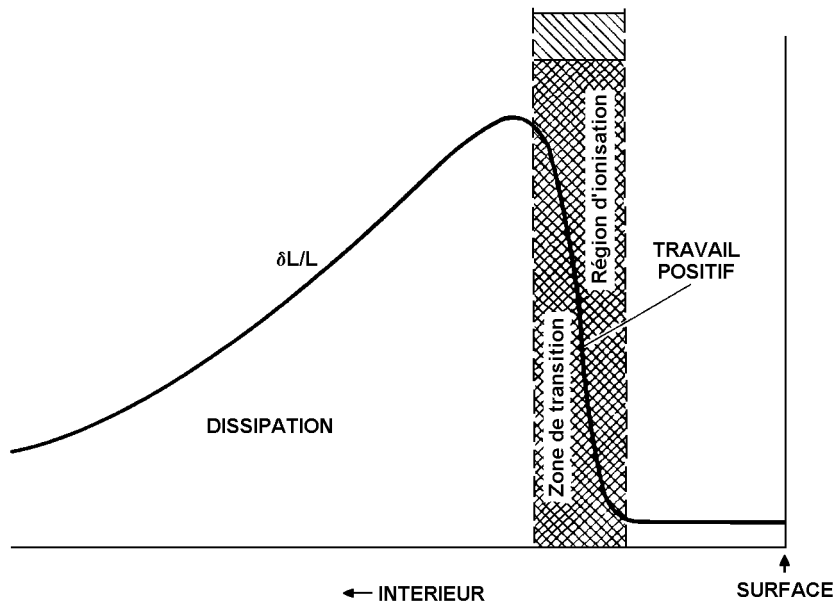


FIG. 11.5 – Comportement de  $\delta L/L$  dans les couches superficielles d'un modèle stellaire (Cox, 1967).

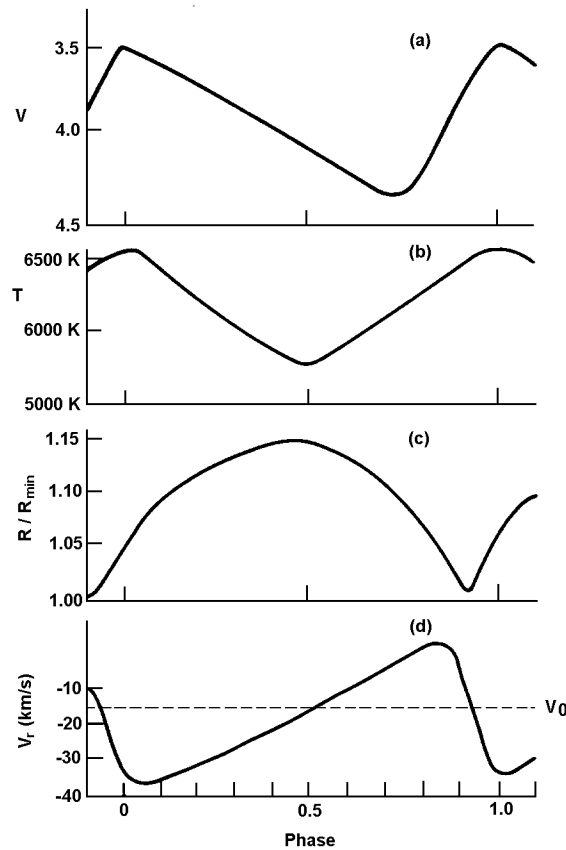


FIG. 11.6 – La pulsation de  $\delta$  Cep : (a) courbe de lumière, (b) température, (c) rayon, (d) vitesse radiale (Petit, 1987).

## 11.2 Le retard de phase de la lumière

Selon la théorie adiabatique, le maximum de luminosité devrait correspondre au minimum de rayon. Mais, pour les variables de la bande d'instabilité, le maximum de luminosité coïncide avec le maximum de la vitesse d'expansion (figure 11.6). Pour une oscillation sinusoïdale, le retard de phase serait donc d'un quart de période sur la prédiction de la théorie adiabatique. A cause de l'asymétrie des courbes de lumière et de vitesse radiale, ce retard est un peu plus faible. Les calculs détaillés reproduisent bien ce retard de phase et montrent qu'il est dû à la zone d'ionisation de l'hydrogène. Il peut être expliqué par une théorie linéaire simple (Castor 1968 et 1971, Cox 1980). Nous n'en donnons que les grandes lignes ci-dessous.

Bien qu'elle corresponde à des températures s'échelonnant entre 8000 K et 15000 K, la zone d'ionisation de l'hydrogène est très étroite et correspond à une faible fraction (de l'ordre du vingtième) de l'échelle de hauteur de pression. Cette zone d'ionisation peut donc être considérée comme une discontinuité (comme un changement de phase). Au cours de la pulsation cette discontinuité se déplace à travers la masse de l'étoile. Supposons qu'au-dessous du front d'ionisation  $\delta L$  soit en opposition de phases avec  $\delta r$ . Au minimum de rayon,  $\delta L > 0$  sous le front d'ionisation. Celui-ci absorbe de l'énergie et se déplace donc, à travers la masse de l'étoile, vers l'extérieur. Ce n'est qu'un quart de période plus tard,

quand  $\delta L$  passe par 0 sous le front d'ionisation, que celui-ci atteint sa position la plus extérieure. Or les couches de l'étoile surmontant le front d'ionisation ont une structure très simple qui dépend essentiellement de la position du front d'ionisation. C'est pourquoi la température effective est en phase avec la position du front d'ionisation et atteint son maximum lorsque celui-ci atteint sa position la plus extérieure.

Ce mécanisme responsable du retard de lumière ne peut pas exister dans les étoiles dont la température effective est supérieure à  $10^4$ K. Ceci est conforme aux observations : les variables de type  $\beta$  Cep ne présentent pas de retard de phase.

## Note

Le potentiel d'ionisation de H est de 13,6 eV. Pour l'hélium, il est de 24,6 eV pour la première ionisation et de 54,4 eV pour la seconde. La zone de seconde ionisation de l'hélium se situe à une température d'environ 40000 K, tandis que la zone d'ionisation de l'hydrogène se situe vers 10000 K.

## Références

- Castor J.I., 1968. A simplified picture of the cepheid phase lag. *Ap J*, 154, 793–798.
- Castor J.I., 1971. On the calculation of linear, non adiabatic pulsations of stellar models. *Ap J*, 166, 109–129.
- Cox J.P., 1967. The linear theory : initiation of pulsational instability in stars. In Thomas R.N. (edit.), *Aerodynamic phenomena in stellar atmospheres*, IAU Symp n° 28. Academic Press, 3–72.
- Cox J.P., 1980. *Theory of stellar pulsation*. Princeton University.
- Fernie J.D., 1992. A new approach to the cepheid period-luminosity law :  $\delta$  Scuti stars as small cepheids. *Astron J*, 103, 1647–1651.
- Petit M., 1987. *Variable stars*. Wiley and Sons.

# Chapitre 12

## Stabilité séculaire

Le temps caractéristique d'évolution d'un mode séculaire est de l'ordre de grandeur du temps d'Helmholtz-Kelvin. On ne peut donc pas envisager d'utiliser l'approximation adiabatique. Par contre le terme d'accélération, c'est-à-dire le terme en  $s^2$ , peut être omis dans l'équation de mouvement. Cela revient à négliger un terme de l'ordre de  $(\tau_{dyn}/\tau_{HK})^2$ , comparé aux autres termes de l'équation. L'omission de ce terme ne simplifie malheureusement pas l'intégration du système différentiel, d'ordre 4, en variables complexes.

Pendant longtemps on s'est contenté d'un critère simple de stabilité séculaire, qui peut être considéré comme une approche grossière du problème. Nous exposons ce critère ci-dessous.

Pour obtenir la valeur caractéristique  $s$  d'un mode séculaire, on peut négliger le terme  $s^3$  de l'équation cubique obtenue dans un chapitre précédent. Il vient alors

$$s = -\frac{B}{A} = -\frac{\int (\Gamma_3 - 1) \frac{\bar{\delta\rho}}{\rho} \left( \delta\epsilon - \frac{d\delta L}{dm} \right) dm}{\int \left\{ c^2 r^2 \left| \frac{d}{dr} \left( \frac{\delta r}{r} \right) \right|^2 - \frac{r}{\rho} \frac{d}{dr} [(3\Gamma_1 - 4)P] \left| \frac{\delta r}{r} \right|^2 \right\} dm}.$$

L'approximation consiste à prendre comme fonction propre une perturbation décrivant une contraction homologue du modèle.

$$\frac{\delta r}{r} = -1, \quad \frac{\delta \rho}{\rho} = 3, \quad \frac{\delta P}{P} = 4, \quad \frac{\delta T}{T} = \frac{4 - 3P_\rho}{P_T}.$$

$\delta L/L$  est donné par l'équation de transfert et se réduit à

$$\frac{\delta L}{L} = 4 \frac{\delta r}{r} + 4 \frac{\delta T}{T} - \frac{\delta \kappa}{\kappa} = -4 - 3\kappa_\rho + \frac{4 - 3P_\rho}{P_T} (4 - \kappa_T).$$

On obtient

$$s \approx -\frac{(\Gamma_3 - 1)L}{(\Gamma_1 - \frac{4}{3})|\Omega|} \left\{ 3\kappa_\rho + 3\epsilon_\rho + 4 + \frac{4 - 3P_\rho}{P_T} (\kappa_T + \epsilon_T - 4) \right\},$$

où  $\Omega = -\int \frac{Gm dm}{r}$  est l'énergie potentielle gravifique de l'étoile.

On notera les points suivants.

1°)  $s \approx 1/\tau_{HK}$

2°) En supposant le modèle dynamiquement stable ( $\Gamma_1 > 4/3$ ), le critère de stabilité s'écrit

$$3\kappa_\rho + 3\epsilon_\rho + 4 + \frac{4 - 3P_\rho}{P_T}(\kappa_T + \epsilon_T - 4) > 0.$$

## 12.1 Gaz parfait

Pour un gaz parfait, le critère de stabilité prend la forme

$$3\kappa_\rho + \kappa_T + 3\epsilon_\rho + \epsilon_T > 0.$$

Pour une étoile de la séquence principale, prenons

$$\kappa_\rho \approx 1, \quad \kappa_T \approx -3,5, \quad \epsilon_\rho \approx 1.$$

$\epsilon_T$  varie selon la température et les réactions nucléaires considérées. Citons néanmoins quelques valeurs typiques. Pour la chaîne du proton,  $\epsilon_T \approx 6$  vers  $5 \cdot 10^6$  K et pour le cycle du carbone  $\epsilon_T \approx 13$  vers  $5 \cdot 10^7$  K. Le critère de stabilité séculaire est donc satisfait. On l'interprète physiquement dans les termes suivants. Considérons une contraction homologue de l'étoile, réalisée suffisamment lentement pour que l'équilibre hydrostatique soit assuré à chaque instant (il faut évidemment supposer qu'une transformation homologue d'un modèle d'équilibre est encore un modèle d'équilibre). Elle est décrite par

$$\frac{\delta r}{r} = -1, \quad \frac{\delta \rho}{\rho} = 3, \quad \frac{\delta P}{P} = 4, \quad \frac{\delta T}{T} = 1.$$

On a alors

$$\frac{\delta \epsilon}{\epsilon} - \frac{\delta L}{L} = 3\kappa_\rho + \kappa_T + 3\epsilon_\rho + \epsilon_T > 0.$$

Si cette quantité est positive, cela signifie que le supplément de production d'énergie nucléaire résultant de l'accroissement de densité et de température ne peut être entièrement compensé par un accroissement de la luminosité. Il s'ensuit un accroissement de température. La pression s'accroît également et s'oppose à toute nouvelle contraction du modèle.

## 12.2 Matière dégénérée

On a, à présent,

$$P_\rho \approx 5/3, \quad P_T \approx 0$$

et le critère de stabilité s'écrit

$$\epsilon_T + \kappa_T - 4 < 0.$$

Dans la matière dégénérée, le transfert d'énergie s'effectue par conduction et on a (pour la matière fortement dégénérée)

$$\kappa \propto \rho^{-2} T^2 \quad \text{et} \quad \kappa_T \approx 2.$$

On voit que la présence de combustible nucléaire dans la matière dégénérée conduit à une instabilité séculaire. On interprète physiquement cette instabilité de la manière suivante. Dans la matière dégénérée, la pression est presque indépendante de la température. Considérons donc une perturbation décrite par

$$\frac{\delta r}{r} = \frac{\delta \rho}{\rho} = \frac{\delta P}{P} = 0, \quad \frac{\delta T}{T} = 1.$$

On a

$$\frac{\delta \epsilon}{\epsilon} - \frac{\delta L}{L} = \epsilon_T + \kappa_T - 4 > 0.$$

Un accroissement de la température accroît la production d'énergie nucléaire. Comme cet excès d'énergie ne peut pas être entièrement évacué par la luminosité, il en résulte un accroissement de température. Celui-ci est sans effet sur la pression, la structure hydrostatique de l'étoile ne réagit pas et l'accroissement de température produit un nouvel accroissement de la production d'énergie nucléaire. Le phénomène amorcé s'emballe et ne s'arrêtera que lorsque l'accroissement de température sera suffisant pour lever la dégénérescence.

### 12.3 Application à l'évolution stellaire

La notion de stabilité séculaire permet de comprendre, ou du moins d'éclairer, certains problèmes de structure et d'évolution stellaire. Notons que les modèles séculairement instables ne peuvent pas représenter des étoiles au cours de leur évolution. En effet, l'apparition d'une instabilité séculaire signifie que l'hypothèse d'équilibre thermique n'est plus justifiée et que l'étoile va réajuster sa structure sur une échelle de temps thermique.

Le problème de l'unicité des modèles stellaires est intimement lié à celui de la stabilité séculaire. Considérons un modèle stellaire en équilibre hydrostatique et thermique de masse totale  $M$  et de composition chimique  $\chi(m)$ . Ce modèle satisfait à quatre équations différentielles et quatre conditions aux limites. En général, ces équations n'admettent pas d'autre solution de même masse et de même composition chimique au voisinage de ce modèle. Localement, le modèle est unique. Considérons le cas exceptionnel où il existe néanmoins une solution voisine du modèle considéré et décrivons-la par  $r + \delta r$ ,  $\rho + \delta \rho$ ,  $P + \delta P$ , ... Les grandeurs  $\delta r$ ,  $\delta \rho$ ,  $\delta P$ , ... satisfont aux équations de structure linéarisées, qui sont identiques aux équations de stabilité séculaire avec  $s = 0$ . Ainsi l'unicité locale du modèle stellaire est violée lorsqu'il existe un mode séculaire de valeur propre nulle.

Le concept de série linéaire a été introduit par Poincaré en mécanique, mais son usage s'avère intéressant également dans l'étude des structures stellaires et de leur stabilité séculaire. Il va permettre de donner une vue plus concrète des notions qui précèdent. Considérons une famille de modèles à un paramètre  $\lambda$  (par exemple, la séquence principale est une série linéaire de paramètre  $\lambda = M$  et de composition chimique homogène  $\chi(m) = \chi_0$ ). On représente généralement une série linéaire à l'aide d'un diagramme  $(\lambda, X)$  où  $X$  est une caractéristique du modèle. Cette représentation est appelée diagramme de bifurcation. Pour la plupart des valeurs de  $\lambda$ , un modèle d'équilibre peut être prolongé continûment et de façon unique au voisinage de  $\lambda$ . Les valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles cela n'est pas possible

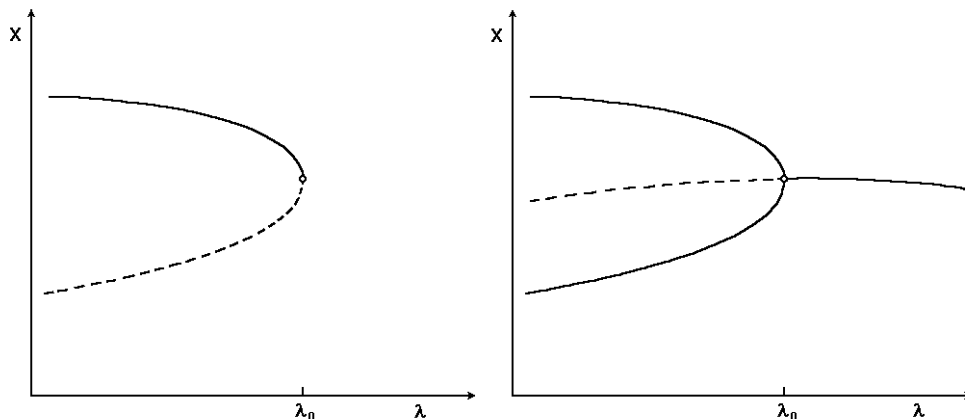


FIG. 12.1 – Diagrammes de bifurcation avec une valeur critique  $\lambda_0$ .

ou n'est pas possible de manière univoque sont appelées points critiques. En ces points critiques, l'unicité locale du modèle stellaire est violée et le modèle admet une valeur propre séculaire nulle. Il est donc fréquent d'observer un changement de stabilité en un point critique. Si on représente en trait plein les modèles stables et en trait discontinu les modèles instables, la figure 12.1 illustre des allures typiques d'un diagramme de bifurcation au voisinage d'un point critique.

Considérons la séquence principale de l'hélium, c'est-à-dire la famille de modèles chimiquement homogènes essentiellement constitués d'hélium et brûlant l'hélium dans les régions centrales. Cette séquence principale présente moins d'intérêt que la séquence principale d'hydrogène. Néanmoins de tels modèles peuvent représenter les restes d'étoiles originellement plus massives, ayant développé un noyau d'hélium et ayant perdu leur enveloppe riche en hydrogène. Le diagramme de bifurcation de cette série linéaire est donné à la figure 12.2 Cette série linéaire présente deux points critiques. La première branche, notée He-MS, constitue la séquence principale. Elle se raccorde à une branche intermédiaire instable, He-int, qui se prolonge jusqu'à la masse limite de Chandrasekhar, voisine de  $1,4 M_\odot$  ( $5,836 M_\odot / \mu_e^2$ , où  $\mu_e$  est le poids moléculaire par électron, proche de 2 pour une naine blanche). Vient ensuite une branche stable appelée branche des naines blanches (WD), il s'agit de modèles en équilibre thermique, à ne pas confondre avec les modèles de naines blanches en cours de refroidissement.

Pendant la phase de séquence principale, le noyau de l'étoile s'appauvrit en hydrogène et s'enrichit en hélium. Les réactions nucléaires finissent par s'arrêter dans le noyau et se poursuivent dans une couche entourant celui-ci. Le noyau est alors isotherme et sa masse s'accroît au cours du temps. L'étoile est alors constituée d'un noyau d'hélium pratiquement pur représentant une fraction  $q_c$  de la masse totale, le reste de l'étoile ayant gardé sa composition initiale. Cette phase de l'évolution peut être représentée schématiquement par une série linéaire de paramètre  $q_c$ . La figure 12.3 montre l'aspect du diagramme de bifurcation pour différentes valeurs de la masse totale. Lorsque le noyau d'hélium grossit, le modèle atteint un point critique où une valeur propre séculaire s'annule et change



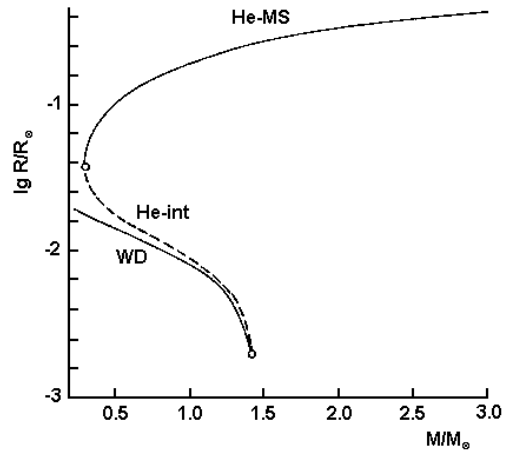


FIG. 12.2 – Diagramme de bifurcation de la séquence Les cercles indiquent les points critiques (d'après Kippenhahn et Weigert, 1990).

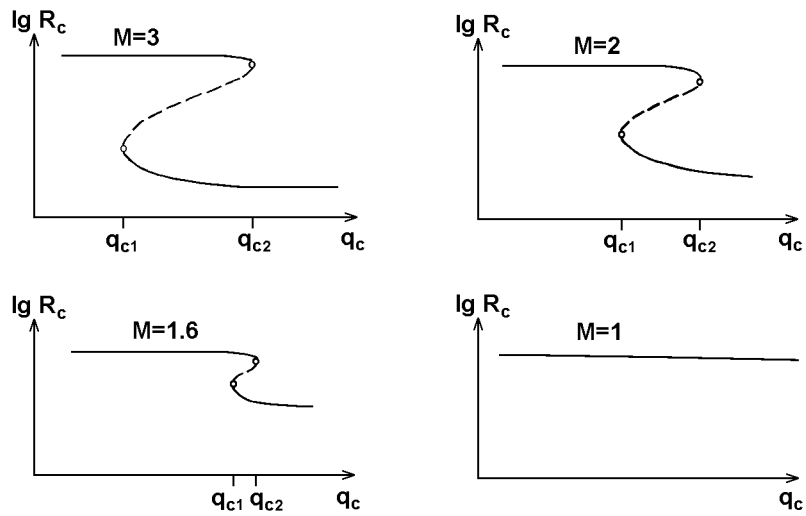


FIG. 12.3 – Diagramme de bifurcation de la série linéaire des modèles ayant une fraction  $q_c$  de leur masse dans le noyau isotherme, pour différentes valeurs de la masse totale (Kippenhahn, Weigert, 1990).

de signes. La masse du noyau correspondant à ce point critique est la masse limite de Schönberg-Chandrasekhar. La fraction de masse contenue dans le noyau est alors donnée approximativement par

$$q_{c2} = 0,37 \left( \frac{\mu_e}{\mu_c} \right)^2,$$

où  $\mu_e$  et  $\mu_c$  sont respectivement les poids moléculaires moyens de l'enveloppe et du noyau. Lorsque l'étoile atteint ce point critique, elle est au seuil de l'instabilité séculaire et son évolution ultérieure ne peut plus être décrite par un modèle en équilibre thermique (on ne trouve de modèle en équilibre thermique avec  $q > q_1$  que sur l'autre branche stable). L'évolution se poursuit alors sur une échelle de temps thermique, le noyau se contracte et cesse d'être isotherme. Le point représentatif de l'étoile dans le diagramme HR se déplace rapidement vers la droite, vers la région des géantes rouges. On notera que pour les étoiles de masse supérieure à  $6 M_\odot$ , la limite de Schönberg-Chandrasekhar est déjà dépassée lorsque s'installe la combustion de l'hydrogène dans une couche. Dans ces étoiles, un noyau isotherme ne se développe pas et la description simplifiée ci-dessus est inadaptée. D'autre part, pour les étoiles de masse inférieure à  $1,4 M_\odot$ , il n'y a plus de point critique.

Lorsqu'elles brûlent l'hélium dans les régions centrales, les étoiles de  $9 M_\odot$  et plus (la limite est sensible aux détails de la physique) atteignent la limite de la stabilité séculaire et voient leur évolution s'accélérer à un moment où elles décrivent des boucles dans le diagramme HR. La vitesse à laquelle elles traversent la bande d'instabilité a des conséquences directes sur le nombre de céphéides.

La remarque concernant l'instabilité de la combustion nucléaire dans la matière dégénérée peut aider à comprendre certaines phases de l'évolution. Dans les étoiles de masse inférieure à  $2,2 M_\odot$ , le noyau d'hélium qui se forme pendant la phase de séquence principale atteint des densités suffisantes pour subir la dégénérescence. Lorsque la température du noyau atteint des valeurs de l'ordre de  $10^8$  K, la réaction  $3\alpha$  de combustion de l'hélium démarre au sein de la matière dégénérée et s'emballe. Cette instabilité thermique, appelée flash de l'hélium, cesse lorsque la température devient suffisamment élevée pour lever la dégénérescence.

L'explosion d'une nova est due à une instabilité thermique du même type. Une nova est un système binaire dont une composante est une naine blanche. L'autre composante, plus froide, remplit complètement son lobe de Roche et perd de la matière (voir figure 12.4). Celle-ci est capturée par la naine blanche après avoir transité par un disque d'accrétion. De la matière riche en hydrogène s'accumule progressivement à la surface de la naine blanche. Lorsque la température à la base de la matière accrétée est suffisamment élevée, les réactions nucléaires démarrent, deviennent explosives et expulsent les couches superficielles de l'étoile.

## Note

L'énergie potentielle gravifique d'une étoile se calcule de la façon décrite ci-dessous. Soit  $\Phi$  le potentiel gravifique. On a

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{Gm}{r^2},$$

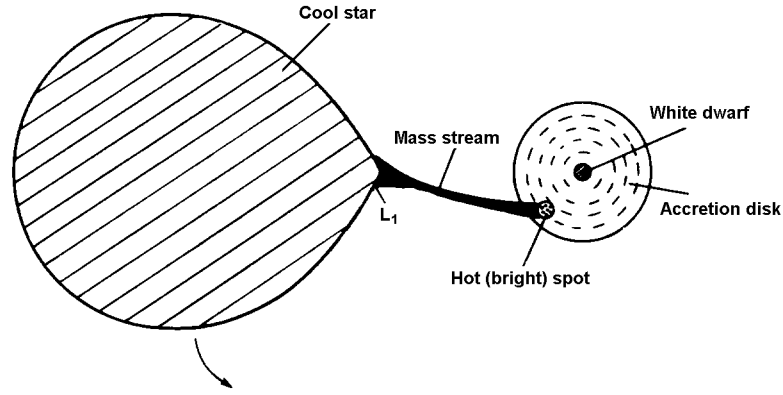


FIG. 12.4 – Modèle de nova (Robinson, 1976).

$$\Phi(R) = -\frac{GM}{R}.$$

L'énergie potentielle gravifique s'écrit

$$\Omega = \frac{1}{2} \int \Phi dm = \frac{1}{2} \int \Phi \frac{dm}{dr} dr.$$

On intègre par parties

$$\begin{aligned} \Omega &= -\frac{1}{2} \frac{GM^2}{R} - \frac{1}{2} \int m \frac{d\Phi}{dr} dr = -\frac{1}{2} \frac{GM^2}{R} - \frac{1}{2} \int \frac{Gm^2}{r^2} dr \\ &= -\frac{1}{2} \frac{GM^2}{R} + \frac{1}{2} \int Gm^2 \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \right) dr. \end{aligned}$$

On intègre à nouveau par parties et on obtient

$$\Omega = - \int \frac{Gm}{r} dm.$$

## Références

Pour l'application du concept de stabilité séculaire à l'évolution stellaire on consultera l'article de Hansen (1978). C'est à Gabriel et Ledoux (1967) qu'on doit l'interprétation de la masse critique de Schönberg-Chandrasekhar comme un point de bifurcation d'une série linéaire. La notion de série linéaire de modèles stellaires a été intensivement exploitée par Paczyński et ses collaborateurs dans une série de travaux publiés entre 1972 et 1975. Le concept de stabilité séculaire a été étendu au cas des modèles hors d'équilibre thermique par Gabriel (1972) et Noels (1972). Ces auteurs ont montré que les résultats de l'analyse de stabilité séculaire pouvaient être interprétés comme des approximations linéaires de l'évolution. L'instabilité séculaire affectant les étoiles de  $9 M_{\odot}$  et plus lorsqu'elles brûlent l'hélium dans les régions centrales a été étudiée par Lauterborn et al. (1971).

Gabriel M., Ledoux P., 1967. Sur la stabilité séculaire des modèles à noyaux isothermes. *Ann Astrophys*, 30, 975–983.

- Gabriel, 1972. Secular stability of a  $1.1 M_{\odot}$  star during the gravitational contraction and the main sequence phase. *Astron Astrophys*, 18, 242–252.
- Hansen C.J., 1978. Secular stability : applications to stellar structure and evolution. *Ann Rev Astron Astrophys*, 16, 15–32.
- Kippenhahn R., Weigert A., 1990. *Stellar structure and evolution*. Springer.
- Kozłowski M., Paczyński B., 1973. Linear series of stellar models. III. Hydrogen-helium star of  $10 M_{\odot}$ . *Acta Astron*, 23, 65–77.
- Kozłowski M., Paczyński B., Popova K., 1973. Linear series of stellar models. IV. Helium-carbon stars of  $3.5 M_{\odot}$  and  $1 M_{\odot}$ . *Acta Astron*, 23, 263–271.
- Kozłowski M., Paczyński B., 1975. Linear series of stellar models. V. Hydrogen-helium stars of 0.6, 0.7, 1, 1.5, 2, 3 and  $5 M_{\odot}$ . *Acta Astron*, 25, 321–330.
- Lauterborn D., Refsdal S., Roth M.L., 1971. Stars with central helium burning and the occurrence of loops in the HR diagram. II. Secular instabilities during the loops. *Astron Astrophys*, 13, 119–129.
- Noels A., 1972. Evolution and secular stability of a  $0.8 M_{\odot}$  carbon star. *Astron Astrophys*, 18, 350–362.
- Paczyński B., 1972. Linear series of stellar models. I. Thermal stability of stars. *Acta Astron*, 22, 163–174.
- Paczyński B., Kozłowski M., 1972. Linear series of stellar models. II. Pure carbon stars. *Acta Astron*, 22, 315–325.
- Robinson E.L., 1976. The structure of cataclysmic variables. *Ann Rev Astron Astrophys*, 14, 119–142.

# Chapitre 13

## Oscillations non radiales

### 13.1 Coordonnées sphériques, rappel

Rappelons les relations entre coordonnées sphériques et coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi, \\y &= r \sin \theta \sin \phi, \\z &= r \cos \theta.\end{aligned}$$

Nous utiliserons la base cartésienne locale  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$ . Notons les expressions différentielles de ces vecteurs :

$$\begin{aligned}d\vec{e}_r &= \vec{e}_\theta d\theta + \sin \theta \vec{e}_\phi d\phi, \\d\vec{e}_\theta &= -\vec{e}_r d\theta + \cos \theta \vec{e}_\phi d\phi, \\d\vec{e}_\phi &= -(\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta) d\phi.\end{aligned}$$

Les expressions des opérateurs différentiels appliqués aux coordonnées ou aux vecteurs de base se déduisent aisément des relations précédentes.

$$\begin{aligned}\text{grad } r &= \vec{e}_r, & \text{div } \vec{e}_r &= \frac{2}{r}, & \text{rot } \vec{e}_r &= 0, \\ \text{grad } \theta &= \frac{1}{r} \vec{e}_\theta, & \text{div } \vec{e}_\theta &= \frac{1}{r} \cotg \theta, & \text{rot } \vec{e}_\theta &= \frac{1}{r} \vec{e}_\phi, \\ \text{grad } \phi &= \frac{1}{r \sin \theta} \vec{e}_\phi, & \text{div } \vec{e}_\phi &= 0, & \text{rot } \vec{e}_\phi &= \frac{1}{r} \cotg \theta \vec{e}_r - \frac{1}{r} \vec{e}_\theta.\end{aligned}$$

Soit  $\alpha$  un champ scalaire et  $\vec{a}$  un champ vectoriel. Nous écrirons  $\vec{a}$  sous la forme

$$\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\theta \vec{e}_\theta + a_\phi \vec{e}_\phi.$$

On obtient aisément

$$\begin{aligned}\text{grad } \alpha &= \frac{\partial \alpha}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} \vec{e}_\phi, \\ \text{div } \vec{a} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (a_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi},\end{aligned}$$

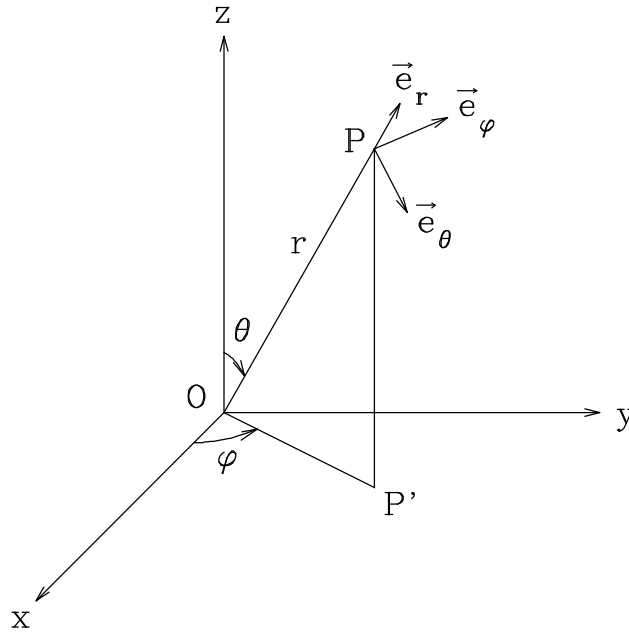


FIG. 13.1 – Les coordonnées sphériques.

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{a} &= \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (a_\phi \sin \theta) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} \right] \vec{e}_r + \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_\phi) \right] \vec{e}_\theta \\ &+ \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_\phi, \\ \Delta \alpha &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \phi^2}. \end{aligned}$$

Nous poserons

$$L^2 = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2},$$

où on reconnaît l'opérateur carré du moment cinétique utilisé en mécanique quantique. C'est, en quelque sorte, la partie angulaire du laplacien (on l'appelle parfois legendrien).

$$\Delta \alpha = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} L^2 \alpha.$$

Rappelons que les fonctions sphériques  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  sont les fonctions propres de  $L^2$  :

$$L^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = \ell(\ell + 1) Y_{lm}(\theta, \phi).$$

## 13.2 Équations aux perturbations

Intéressons-nous à une perturbation dépendant du temps par un facteur  $e^{st}$ . Écrivons le vecteur déplacement sous la forme

$$\vec{\delta r} = \delta r \vec{e}_r + r \delta \theta \vec{e}_\theta + r \delta \phi \sin \theta \vec{e}_\phi.$$

On sera attentif aux notations utilisées :  $\delta r$  ne désigne pas le module de  $\vec{\delta r}$  mais sa composante radiale.

En utilisant des perturbations eulériennes, les équations différentielles du problème s'écrivent de la façon suivante.

Équation de continuité :

$$\rho' + \delta r \frac{d\rho}{dr} + \rho \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \delta r) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \delta \theta) + \frac{\partial \delta \phi}{\partial \phi} \right\} = 0.$$

Équations de mouvement :

$$\begin{aligned} s^2 \delta r &= -\frac{\partial \Phi'}{\partial r} + \frac{\rho'}{\rho^2} \frac{dP}{dr} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial r}, \\ s^2 r \delta \theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi'}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P'}{\partial \theta}, \\ s^2 r \sin \theta \delta \phi &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi'}{\partial \phi} - \frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial P'}{\partial \phi}. \end{aligned}$$

Équation de Poisson :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi'}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} L^2 \Phi' = 4\pi G \rho'.$$

Équation d'énergie :

$$\begin{aligned} sT \left( S' + \delta r \frac{dS}{dr} \right) &= \epsilon' + \frac{\rho'}{\rho^2} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 F) \\ &\quad - \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r') + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\theta') + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi'}{\partial \phi} \right\}. \end{aligned}$$

Équations de transfert :

$$\begin{aligned} F_r' &= -\chi' \frac{dT}{dr} - \lambda \frac{\partial T'}{\partial r}, \\ F_\theta' &= -\frac{\lambda}{r} \frac{\partial T'}{\partial \theta}, \\ F_\phi' &= -\frac{\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial T'}{\partial \phi}. \end{aligned}$$

Exprimons  $P'$  et  $T'$  en termes de  $\rho'$ ,  $S'$  et des composantes du déplacement. Il reste alors 9 fonctions inconnues :  $\rho'$ ,  $S'$ ,  $\delta r$ ,  $\delta \theta$ ,  $\delta \phi$ ,  $F_r'$ ,  $F_\theta'$ ,  $F_\phi'$  et  $\Phi'$  qui doivent satisfaire 9 équations aux dérivées partielles.

Ce problème est assez compliqué. En particulier, il n'est pas facile d'écrire des conditions limites en surface pour les composantes du flux. Nous nous limiterons à l'étude des oscillations non radiales adiabatiques. L'équation d'énergie est remplacée par  $\delta S = 0$ . Il n'est plus nécessaire de déterminer  $\vec{F}'$  et l'équation de transfert devient inutile.

$\delta\theta$  et  $\delta\phi$  peuvent être tirés des équations de mouvement :

$$\begin{aligned}\delta\theta &= -\frac{1}{s^2 r^2} \frac{\partial\chi}{\partial\theta}, \\ \delta\phi &= -\frac{1}{s^2 r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial\chi}{\partial\phi},\end{aligned}$$

où nous avons posé, pour simplifier l'écriture,  $\chi = \Phi' + P'/\rho$ . On substitue ces expressions dans l'équation de continuité :

$$\rho' + \delta r \frac{d\rho}{dr} + \frac{\rho}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \delta r) + \frac{\rho}{s^2 r^2} L^2 \chi = 0.$$

Développons  $\delta r$ ,  $\Phi'$ ,  $\rho'$  et  $P'$  en séries de fonctions sphériques :

$$\begin{aligned}\delta r(r, \theta, \phi, t) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \delta r_{\ell m}(r) Y_{\ell m}(\theta, \phi) e^{st}, \\ &\dots\end{aligned}$$

Dans les équations aux dérivées partielles, les dérivations par rapport à  $\theta$  et  $\phi$  n'apparaissent que dans l'opérateur  $L^2$ . Or les fonctions sphériques sont fonctions propres de cet opérateur. Il en résulte que les équations se séparent. Il reste des équations différentielles pour les fonctions radiales  $\delta r_{\ell m}(r)$ , ... Nous obtenons pour chaque couple  $(\ell, m)$  un système différentiel du 4ème ordre de la forme suivante (nous avons omis les indices  $\ell$  et  $m$ ) :

$$\begin{aligned}\rho' + \delta r \frac{d\rho}{dr} + \frac{\rho}{r^2} \frac{d}{dr}(r^2 \delta r) + \frac{\rho \ell(\ell+1)}{s^2 r^2} \left( \Phi' + \frac{P'}{\rho} \right) &= 0, \\ s^2 \delta r &= -\frac{d\Phi'}{dr} + \frac{\rho'}{\rho^2} \frac{dP}{dr} - \frac{1}{\rho} \frac{dP'}{dr}, \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi'}{dr} \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \Phi' &= 4\pi G \rho' .\end{aligned}$$

Nous devons encore spécifier les conditions aux limites que doivent satisfaire les solutions de ce système. En  $r = 0$ , certains coefficients du système différentiel sont singuliers. Nous imposerons aux solutions de rester régulières. Un développement en série montre qu'on doit imposer deux conditions limites au centre et qu'on a, en son voisinage,

$$\delta r \propto r^{\ell-1}, \quad P' \text{ et } \Phi' \propto r^{\ell}.$$

A la surface de l'étoile, on imposera la condition  $\delta P = 0$ . Il est inutile de raffiner cette condition lorsqu'on utilise l'approximation adiabatique. On imposera également la continuité du potentiel gravifique et de son gradient. Pour l'exprimer, notons qu'à l'extérieur de l'étoile,  $\Phi'_e$  (nous utilisons l'indice  $e$  pour désigner la solution extérieure) satisfait à l'équation de Laplace

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi'}{dr} \right) - \frac{\ell(\ell+1)\Phi'}{r^2} = 0,$$



dont la solution régulière (c'est-à-dire qui tend vers zéro à l'infini) s'écrit

$$\Phi'_e = \frac{A}{r^{\ell+1}}$$

où  $A$  est une constante.

Exprimons la continuité du potentiel et de sa dérivée par rapport à  $r$  à la surface de l'étoile.

$$\begin{aligned}\delta\Phi &= \delta\Phi_e, \\ \delta\frac{d\Phi}{dr} &= \delta\frac{d\Phi_e}{dr},\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}\Phi' + \delta r \frac{d\Phi}{dr} &= \Phi'_e + \delta r \frac{d\Phi_e}{dr}, \\ \frac{d\Phi'}{dr} + \delta r \frac{d^2\Phi}{dr^2} &= \frac{d\Phi'_e}{dr} + \delta r \frac{d^2\Phi_e}{dr^2}.\end{aligned}$$

On notera que les dérivées premières du potentiel sont égales

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{d\Phi_e}{dr}.$$

En ce qui concerne les dérivées secondes, on n'a l'égalité que si la densité s'annule en surface. On a, en effet,

$$\begin{aligned}\frac{d^2\Phi_e}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi_e}{dr} &= 0, \\ \frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi}{dr} &= 4\pi G\rho.\end{aligned}$$

En soustrayant, il vient

$$\frac{d^2\Phi_e}{dr^2} - \frac{d^2\Phi}{dr^2} = -4\pi G\rho.$$

Les conditions de continuité donnent donc

$$\begin{aligned}\Phi' &= \frac{A}{r^{\ell+1}}, \\ \frac{d\Phi'}{dr} &= -\frac{(\ell+1)A}{r^{\ell+2}} - 4\pi G\rho \delta r.\end{aligned}$$

L'élimination de la constante  $A$  donne la condition cherchée

$$\frac{d\Phi'}{dr} + \frac{\ell+1}{r}\Phi' + 4\pi G\rho \delta r = 0.$$

On a ainsi à résoudre, pour chaque couple  $(\ell, m)$ , un système différentiel homogène avec conditions limites. Pour une valeur arbitraire de  $s$ , il n'existe pas d'autre solution que la solution nulle. On n'obtiendra de solution non nulle que pour certaines valeurs particulières

de  $s$ , que nous appellerons valeurs propres. Pour chaque couple  $(\ell, m)$ , il en existe une infinité dénombrable que nous noterons  $s_{k\ell m}$ .

L'indice  $m$  ne figure pas dans les équations différentielles, ni dans les conditions limites. Par conséquent on a

$$s_{k\ell m} = s_{k\ell m'}.$$

Les valeurs propres peuvent donc être notées par deux indices seulement  $s_{k\ell}$ . Chaque valeur propre correspond ainsi à  $2\ell + 1$  valeurs différentes de  $m$ , donc à  $2\ell + 1$  modes différents d'oscillation non radiale. On dit qu'elle est dégénérée  $2\ell + 1$  fois. Les fonctions propres décrivant ces  $2\ell + 1$  modes ont le même facteur radial et ne diffèrent que par leur facteur angulaire. Cette dégénérescence est due à la symétrie sphérique de la configuration d'équilibre. On la rencontre également dans la théorie de l'atome d'hydrogène en mécanique quantique. On peut établir l'existence de cette dégénérescence par des méthodes de la théorie des groupes. Cette dégénérescence peut être levée par un facteur qui brise la symétrie sphérique, tel que la rotation.

### 13.3 L'approximation de Cowling

Dans les oscillations non radiales, les perturbations du potentiel gravifique sont, en général, assez petites. Cela est surtout vrai pour les modes d'ordre élevé ( $k$  ou  $\ell$  élevés). Si on les néglige, on obtient un système différentiel du second ordre, plus facile à étudier. C'est l'approximation de Cowling.

$$\begin{aligned} \rho' + \delta r \frac{d\rho}{dr} + \frac{\rho}{r^2} \frac{d}{dr}(r^2 \delta r) + \frac{\ell(\ell+1)P'}{s^2 r^2} &= 0, \\ s^2 \delta r &= \frac{\rho'}{\rho^2} \frac{dP}{dr} - \frac{1}{\rho} \frac{dP'}{dr}. \end{aligned}$$

Supposons  $\Gamma_1$  constant et faisons le changement de variables

$$v = r^2 \delta r P^{1/\Gamma_1}, \quad w = P'/P^{1/\Gamma_1}.$$

En posant  $s = -i\sigma$ , il vient, après quelques calculs,

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dr} &= \left( \frac{L_\ell^2}{\sigma^2} - 1 \right) \frac{r^2 P^{2/\Gamma_1}}{\rho c^2} w, \\ \frac{dw}{dr} &= (\sigma^2 - n^2) \frac{\rho}{r^2 P^{2/\Gamma_1}} v. \end{aligned}$$

Aux limites  $r = 0$  et  $r = R$  on doit imposer  $v = 0$ . Les paramètres  $L_\ell$  et  $n$  ont les dimensions d'une fréquence. Ce sont respectivement les fréquences de Lamb et de Brunt-Väisälä; elles sont définies par les relations

$$L_\ell^2 = \frac{\ell(\ell+1)c^2}{r^2} \quad \text{et} \quad n^2 = -Ag,$$

avec

$$A = \frac{d \ln \rho}{dr} - \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln P}{dr}.$$

Rappelons que le critère de stabilité vis-à-vis de la convection (critère de Schwarzschild) s'écrit  $A < 0$  ou  $n^2 > 0$ .

Si  $\Gamma_1$  n'est pas constant, on obtient un système de la même forme par un changement de variables plus compliqué.

## Référence

On trouvera un traitement détaillé des conditions limites en surface dans les articles de Dupret (2001) et Dupret et al. (2002)

On peut établir par la théorie des groupes que la dégénérescence des fréquences est une conséquence de la symétrie sphérique de la configuration non perturbée (Perdang, 1968).

Dans l'approximation de Cowling, lorsque  $\Gamma_1$  n'est pas constant, le changement de variables à effectuer est donné par Gabriel et Scuflaire (1979).

Dupret M.-A., 2001. Nonradial nonadiabatic stellar pulsations: A numerical method and its application to a  $\beta$  Cephei model. *Astron Astrophys*, 366, 166–173.

Dupret M.-A., De Ridder J., Neuforge C., Aerts C., Scuflaire R., 2002. Influence of non-adiabatic temperature variations on line profile variations of slowly rotating  $\beta$  Cep stars and SPBs. I. Non-adiabatic eigenfunctions in the atmosphere of a pulsating star. *Astron Astrophys*, 385, 563–571.

Gabriel M., Scuflaire R., 1979. Properties of non-radial stellar oscillations. *Acta Astron*, 29, 135–149.

Perdang J., 1968. On some group-theoretical aspects of the study of non-radial oscillations. *Astrophys Space Sci*, 1, 355–371.



# Chapitre 14

## Modes non radiaux

### 14.1 Orthogonalité des fonctions propres

Nous avons vu précédemment que l'équation de mouvement d'une perturbation adiabatique pouvait se mettre sous la forme

$$\sigma^2 \vec{\delta r} = \mathcal{L} \vec{\delta r},$$

où  $\mathcal{L}$  est un opérateur auto-adjoint relativement au produit scalaire

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \int \rho \vec{u} \cdot \vec{v} dV.$$

Les propriétés établies alors s'appliquent donc aux oscillations non radiales adiabatiques. En particulier, les fonctions propres de ce problème peuvent être choisies orthogonales. On notera que les fonctions propres correspondant à une même fréquence mais d'indices  $\ell$  ou  $m$  différents sont orthogonales du fait de l'orthogonalité des fonctions sphériques  $Y_{\ell m}$ .

### 14.2 Composantes du déplacement

Pour un mode donné, on a

$$\begin{aligned} \vec{\delta r} &= \delta r \vec{e}_r + r \delta \theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta \delta \phi \vec{e}_\phi \\ &= \delta r \vec{e}_r + \frac{1}{r \sigma^2} \left( \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \chi}{\partial \phi} \vec{e}_\phi \right), \\ \delta r &= \delta r(r) Y_{\ell m}(\theta, \phi) e^{-i\sigma t}, \\ \chi &= \chi(r) Y_{\ell m}(\theta, \phi) e^{-i\sigma t}. \end{aligned}$$

On écrira

$$\vec{\delta r} = (a(r)\vec{e} + b(r)\vec{\eta}) e^{-i\sigma t},$$

avec

$$\begin{aligned} a(r) &= \delta r(r), \\ b(r) &= \frac{\chi(r)}{r\sigma^2}, \\ \vec{\epsilon} &= Y_{\ell m}(\theta, \phi) \vec{e}_r, \\ \vec{\eta} &= \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \phi} \vec{e}_\phi = \frac{\partial Y_{\ell, m}}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{imY_{\ell, m}}{\sin \theta} \vec{e}_\phi. \end{aligned}$$

On notera que

$$\begin{aligned} \int |\epsilon|^2 d\Omega &= 1, \\ \int |\eta|^2 d\Omega &= \ell(\ell + 1). \end{aligned}$$

La dernière égalité se justifie comme suit

$$\begin{aligned} \int |\eta|^2 d\Omega &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \left[ \left| \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \theta} \right|^2 + \frac{m^2}{\sin^2 \theta} |Y_{\ell m}|^2 \right] \sin \theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \left\{ \left[ \sin \theta \overline{Y}_{\ell m} \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \theta} \right]_0^\pi \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\pi \left[ -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \theta} \right) + \frac{m^2}{\sin^2 \theta} Y_{\ell m} \right] \overline{Y}_{\ell m} \sin \theta d\theta \right\}. \end{aligned}$$

Le terme intégré est nul et

$$\left[ -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \theta} \right) + \frac{m^2}{\sin^2 \theta} Y_{\ell m} \right] = L^2 Y_{\ell m} = \ell(\ell + 1) Y_{\ell m}.$$

Il vient donc

$$\int |\eta|^2 d\Omega = \ell(\ell + 1) \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi |Y_{\ell m}|^2 \sin \theta d\theta = \ell(\ell + 1)$$

et finalement

$$\int |\vec{\delta r}|^2 dm = \int \rho r^2 [a^2 + \ell(\ell + 1)b^2] dr.$$

### 14.3 Modes p, g et f

Le système différentiel décrivant les oscillations non radiales d'une étoile ne peut être résolu analytiquement que dans le cas (fort peu réaliste) du modèle homogène. Cette étude met cependant en évidence les différents types de modes non radiaux. Nous décrivons donc ci-dessous les modes non radiaux du modèle homogène (voir figure 14.1).

Pour chaque couple d'indices  $(\ell, m)$ , on obtient une infinité dénombrable de modes instables ( $\sigma^2 = -s^2 < 0$ ). Les valeurs de  $\sigma^2$  possèdent un point d'accumulation en 0. La force d'Archimède joue un rôle prépondérant dans la dynamique de ces modes. Ils sont

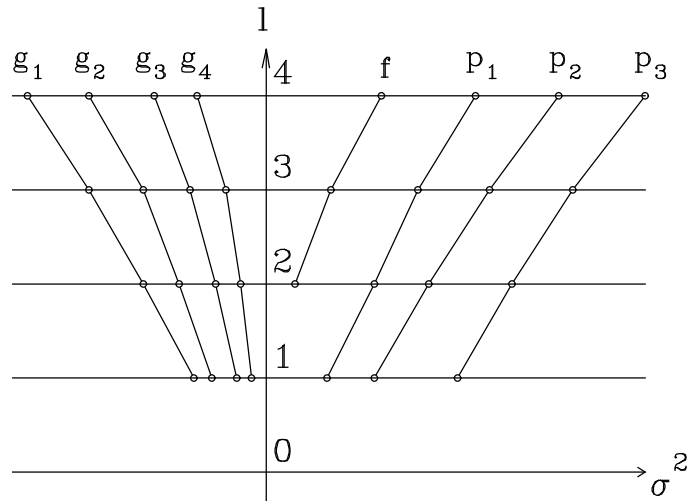


FIG. 14.1 – Fréquences des modes non radiaux du modèle homogène.

de la même nature que les ondes internes de gravité. Ils décrivent en fait l'instabilité du modèle homogène vis-à-vis de la convection. On les appelle modes  $g$  ( $g = \text{gravité}$ ).

Il existe également une infinité dénombrable de modes stables ( $\sigma^2 = -s^2 > 0$ ). Les valeurs de  $\sigma^2$  ne possèdent pas de point d'accumulation à distance finie. Les forces de pression jouent un rôle dominant dans la dynamique de ces modes. Ils sont de même nature que les ondes acoustiques. On les appelle modes  $p$  ( $p = \text{pression}$ ).

Enfin lorsque  $\ell > 1$ , il existe un mode stable, de fréquence inférieure à celles des modes  $p$ . On l'appelle mode  $f$  ( $f = \text{fondamental}$ ).

Pour des modèles plus réalistes, le système différentiel est trop compliqué pour une discussion analytique (voir toutefois ci-dessous). De nombreuses intégrations numériques montrent que les modes non radiaux de modèles physiques peuvent être classés selon un schéma analogue à celui du modèle homogène. Ce schéma est exactement le même si le modèle est entièrement convectif. Si le modèle est entièrement radiatif, les modes  $g$  sont stables. Leurs fréquences sont inférieures aux fréquences du mode  $f$  et des modes  $p$  et possèdent un point d'accumulation en 0. Si le modèle possède à la fois des zones radiatives et des zones convectives, on trouve deux spectres de modes  $g$ , les uns stables, les autres instables, comme cela est représenté à la figure 14.2. Les modes  $g$  stables sont désignés par la notation  $g^+$  et les modes  $g$  instables par la notation  $g^-$ .

Dans l'approximation de Cowling, on peut démontrer rigoureusement l'existence des différents types de modes. De façon moins rigoureuse, on peut observer que pour les valeurs élevées de  $\sigma^2$ , en négligeant le terme en  $1/\sigma^2$ , on a un problème de Sturm-Liouville avec  $\lambda = \sigma^2$  comme paramètre. Les solutions correspondantes sont les modes  $p$ . Pour les petites valeurs de  $\sigma^2$ , en négligeant le terme en  $\sigma^2$ , on a un problème de Sturm-Liouville avec  $\lambda = 1/\sigma^2$  comme paramètre. Les solutions correspondantes sont les modes  $g$ .

La nature physique des modes non radiaux peut être décrite comme suit. Les modes  $p$  sont des ondes acoustiques. Les modes  $g^-$  décrivent l'instabilité convective. Les modes  $g^+$  sont des ondes internes de gravité. Dans les modèles très condensés, les modes  $p$  et les modes  $g^+$  d'ordre  $k$  peu élevé peuvent présenter un caractère mixte et se comporter comme des

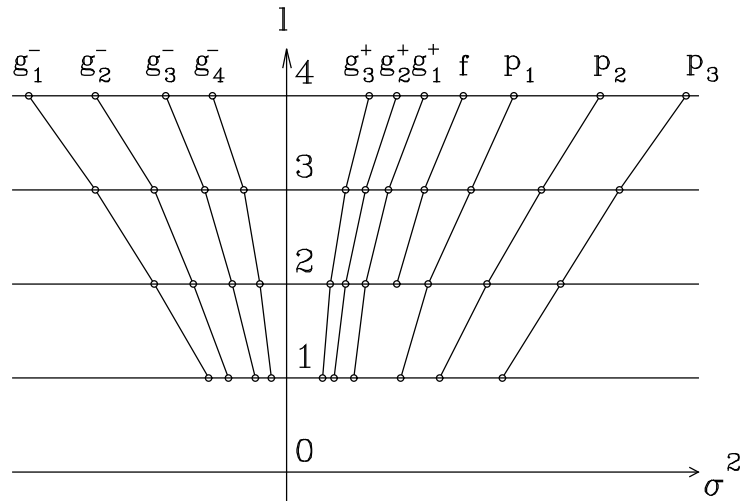


FIG. 14.2 – Fréquences des modes non radiaux d'un modèle physique.

TAB. 14.1 – Quelques caractéristiques de modes non radiaux de degré  $\ell = 2$  du modèle standard.

mode	$\omega$	$\xi_s/\xi_c$	$\langle x \rangle$
$g_{10}$	0,567887	3,977(-3)	0,299
...	...	...	...
$g_3$	1,34992	-2,518(-2)	0,280
$g_2$	1,68171	5,521(-2)	0,278
$g_1$	2,21688	-0,2399	0,292
$f$	2,85926	3,6763	0,493
$p_1$	3,90687	-57,34	0,702
$p_2$	5,16947	213,0	0,735
$p_3$	6,43999	-453,2	0,742
...	...	...	...
$p_{10}$	15,2849	4204	0,739

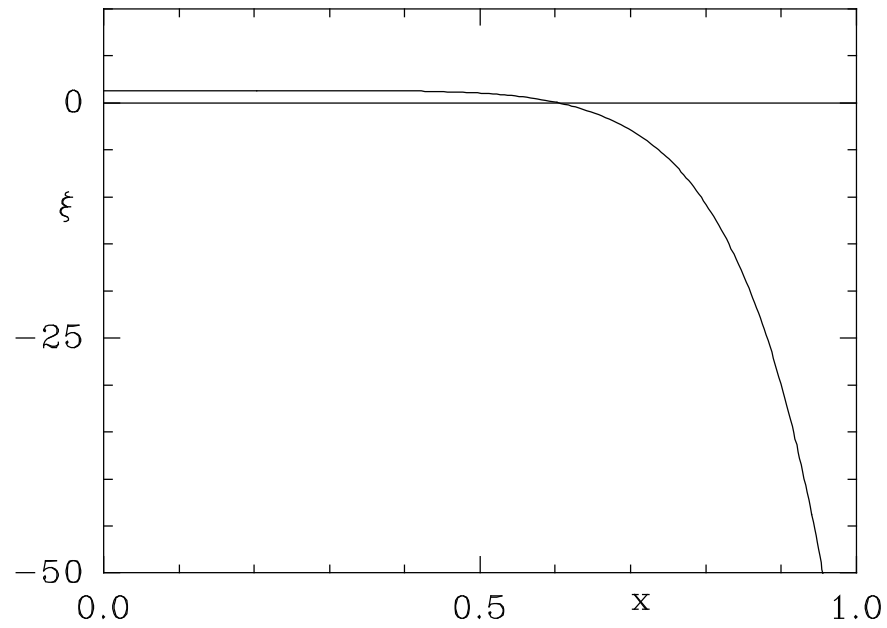
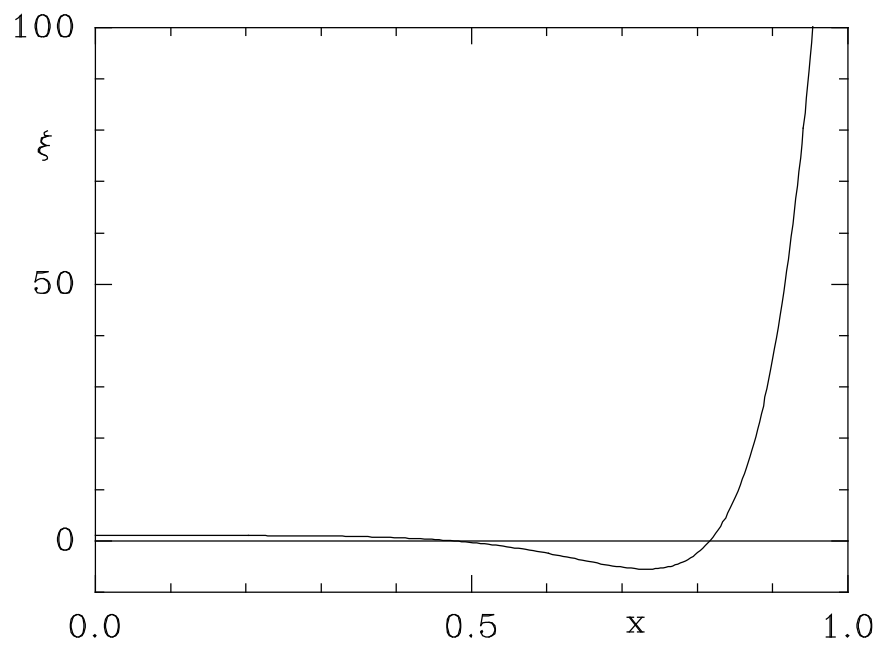
ondes de gravité dans les régions centrales de l'étoile et comme des ondes acoustiques dans les régions externes.

La table 14.1 donne  $\omega$ ,  $\xi_s/\xi_c$  et  $\langle x \rangle$  pour quelques modes non radiaux du modèle standard (polytrophe d'indice 3 avec  $\Gamma_1 = 5/3$ ), avec

$$\xi = x^{1-\ell} \frac{\delta r}{R} \quad \text{et} \quad \langle X \rangle = \frac{\int X |\vec{\delta r}|^2 dm}{\int |\vec{\delta r}|^2 dm}.$$

Les figures 14.3 à 14.7 donnent  $\xi$  pour quelques modes non radiaux du modèle standard. On notera que les modes  $p$ , tout comme les modes radiaux, ont des amplitudes croissantes dans les couches extérieures de l'étoile. Les modes  $g$ , au contraire, ont leur maximum d'amplitude dans les régions centrales.



FIG. 14.3 – Modèle standard, mode d'oscillation non radiale  $\ell = 2, p_1$ .FIG. 14.4 – Modèle standard, mode d'oscillation non radiale  $\ell = 2, p_2$ .

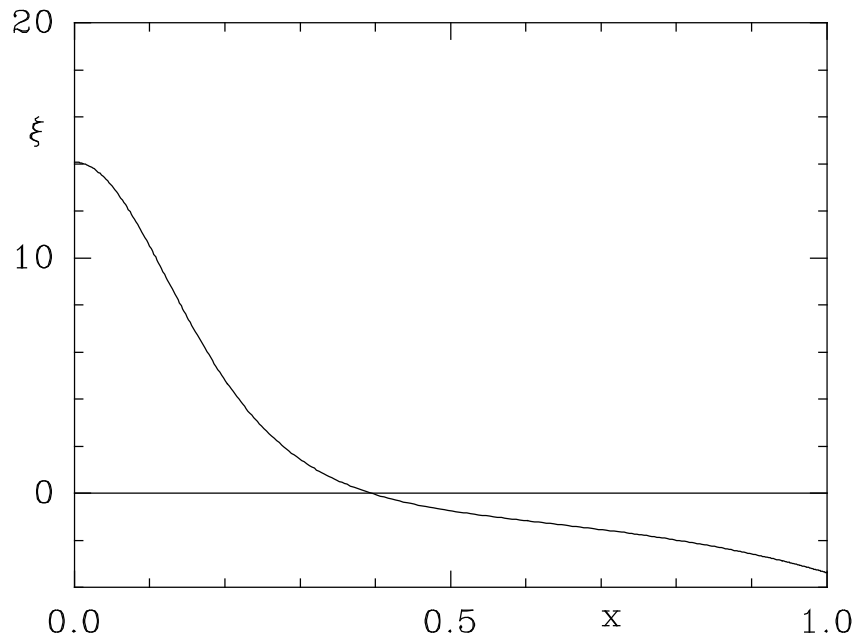


FIG. 14.5 – Modèle standard, mode d'oscillation non radiale  $\ell = 2$ ,  $g_1$ .

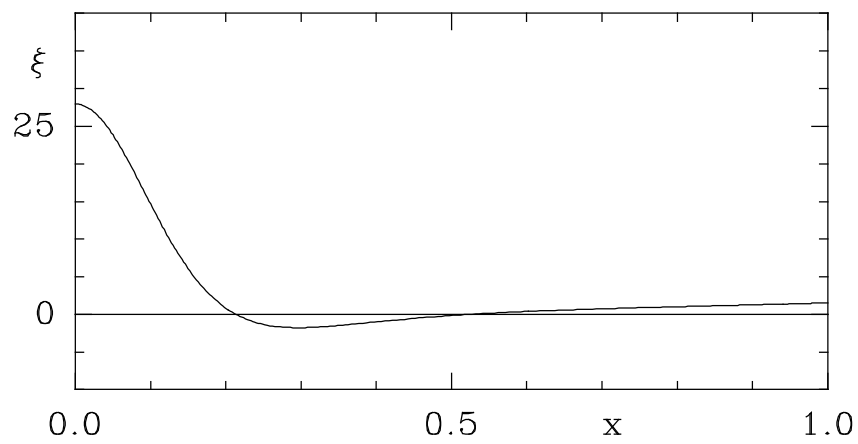
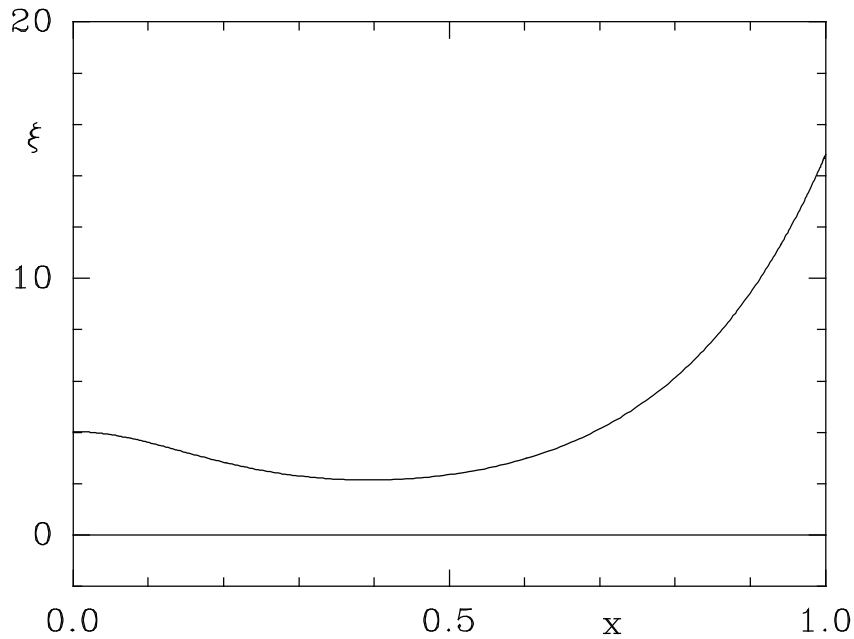


FIG. 14.6 – Modèle standard, mode d'oscillation non radiale  $\ell = 2$ ,  $g_2$ .

FIG. 14.7 – Modèle standard, mode d'oscillation non radiale  $\ell = 2$ ,  $f$ .

## 14.4 Modes sphéroïdaux et modes toroïdaux

Les modes radiaux et non radiaux étudiés jusqu'ici forment-ils un ensemble complet ? Nous allons montrer que ce n'est pas le cas et nous indiquerons comment compléter cet ensemble.

Un champ vectoriel quelconque  $\vec{u}$  peut être décomposé de la façon suivante,

$$\vec{u} = \text{grad } \phi + \text{rot } \vec{v}.$$

Sous certaines conditions (comportement des champs à l'infini), cette décomposition est unique. Le terme  $\text{grad } \phi$  est appelé composante longitudinale du champ et  $\text{rot } \vec{v}$  est sa composante transversale. A son tour, la composante transversale (ou solénoïdale) peut être décomposée comme suit,

$$\text{rot } \vec{v} = \text{rot}(\chi \vec{e}_r) + \text{rot rot}(\psi \vec{e}_r).$$

le terme  $\text{rot}(\chi \vec{e}_r)$  est un champ toroïdal et  $\text{rot rot}(\psi \vec{e}_r)$  est un champ poloïdal.

Un champ vectoriel  $\vec{u}$  peut ainsi être décrit à l'aide de trois potentiels scalaires  $\phi$ ,  $\chi$  et  $\psi$ .

$$\vec{u} = \text{grad } \phi + \text{rot}(\chi \vec{e}_r) + \text{rot rot}(\psi \vec{e}_r).$$

En développant le terme poloïdal, on peut encore écrire

$$\vec{u} = \alpha \vec{e}_r + \text{grad } \beta + \text{rot}(\chi \vec{e}_r).$$

On notera que, dans les deux expressions, le terme toroïdal  $\text{rot}(\chi \vec{e}_r)$  est univoquement défini par la donnée du champ vectoriel  $\vec{u}$ .

Nous allons à présent exprimer  $\vec{\delta r}$  sous cette forme. L'équation de mouvement s'écrit

$$s^2 \vec{\delta r} = -\text{grad } \Phi' - \frac{1}{\rho} \text{grad } P' + \frac{\rho'}{\rho^2} \text{grad } P.$$

En utilisant la relation adiabatique et l'équation de continuité, il vient

$$s^2 \vec{\delta r} = -\text{grad } \chi + c^2 \vec{A} \text{div } \vec{\delta r},$$

où

$$\begin{aligned} \chi &= \phi' + \frac{P'}{\rho}, \\ \vec{A} &= \frac{1}{\rho} \text{grad } \rho - \frac{1}{\Gamma_1 P} \text{grad } P. \end{aligned}$$

On a donc exprimé  $\vec{\delta r}$  sous la forme

$$\vec{\delta r} = \alpha \vec{e}_r + \text{grad } \beta,$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha &= c^2 A \text{div } \vec{\delta r} / s^2, \\ \beta &= -\chi / s^2. \end{aligned}$$

Les modes non radiaux que nous avons considérés jusqu'ici ne possèdent pas de composantes toroïdales. Il est clair qu'ils ne peuvent donc pas former un ensemble complet. Pour obtenir un ensemble complet, nous devons considérer également les modes de fréquence nulle qui ont été négligés dans ce qui précède. Nous ne développerons pas ce point de manière détaillée.

Les modes de fréquence nulle sont indivergentiels. Nous en distinguerons deux classes.

1. Il existe trois modes  $\ell = 1$ ,  $m = -1, 0, 1$  de type sphéroïdal. La composante radiale est une constante non nulle. Ils décrivent une translation de l'étoile.

$$\vec{\delta r} = a \left\{ Y_{\ell m} \vec{e}_r + \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \phi} \vec{e}_\phi \right\} = \text{vecteur constant.}$$

On pourrait, formellement, les considérer comme les modes  $f$  de degré  $\ell = 1$ .

2. Il existe une infinité de modes toroïdaux. Ils sont caractérisés par l'absence de déplacement radial. Ils sont de la forme

$$\vec{\delta r} = a(r) \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \phi} \vec{e}_\theta - \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \theta} \vec{e}_\phi \right\}.$$

Les déplacements horizontaux et indivergentiels ne perturbent évidemment pas l'équilibre hydrostatique de l'étoile et on a

$$\rho' = 0, \quad P' = 0, \quad \Phi' = 0.$$

Les fonctions propres  $\vec{\delta r}$  du problème radial et du problème non radial (modes de fréquence nulle et modes de fréquence non nulle) forment un ensemble complet. Tout champ de déplacement  $\vec{\delta r}$  peut être exprimé sous la forme d'une série dont les termes sont des éléments de cet ensemble.

## 14.5 Expression asymptotique des fréquences

L'étude du comportement asymptotique des modes non radiaux est plus compliquée que celle des modes radiaux, même dans l'approximation de Cowling. A partir des équations en  $v$  et  $w$  obtenues précédemment, on peut écrire une équation du second ordre en  $v$  ou en  $w$ . Outre les singularités au centre et à la surface, on a également une singularité mobile au point où  $\sigma^2 = \sigma_a^2$  dans le premier cas et une ou des singularités mobiles aux points où  $\sigma^2 = n^2$  dans le second cas. Comme pour l'étude asymptotique des oscillations radiales, le modèle est découpé en plusieurs domaines contenant chacun une singularité. Les solutions approchées obtenues dans chacun des domaines sont ensuite raccordées continûment. Nous nous contenterons de donner sans démonstration les approximations d'ordre le plus bas qu'on obtient pour les fréquences.

On obtient, pour les modes  $p$ ,

$$\sigma_{kl} \approx \frac{\left(k + \frac{\ell}{2} + \frac{n_e}{2} + \frac{1}{4}\right) \pi}{\int_0^R \frac{dr}{c}},$$

où  $n_e$  est l'indice polytropique effectif des couches superficielles. Pour  $\ell = 0$ , cette expression se réduit à celle que nous avons obtenue précédemment pour les modes radiaux, numérotés comme ils l'ont été. On notera également l'équidistance et les superpositions approximatives de fréquences données par

$$\sigma_{k+1,l} - \sigma_{k,l} \approx \text{cte}, \quad \sigma_{kl} \approx \sigma_{k-1,l+2} \quad \text{et} \quad \sigma_{k,l+1} \approx (\sigma_{k,l} + \sigma_{k+1,l})/2.$$

Pour les modes  $g^\pm$ , les fréquences asymptotiques sont données par des expressions qui font intervenir la fréquence de Brunt-Väisälä et dont le détail dépend de la succession des zones convectives et radiatives dans le modèle. Dans le cas d'un modèle entièrement radiatif ou entièrement convectif, elles sont données par

$$\frac{\sqrt{\ell(\ell+1)}}{|\sigma_{kl}|} \approx \frac{\left(k + \frac{\ell}{2} + \frac{n_e}{2} + \frac{1}{4}\right) \pi}{\int \frac{|n|}{r} dr}.$$

Pour les autres cas, on consultera l'article de Tassoul (1980). On notera que pour les modes  $g^\pm$  d'ordre élevé, ce sont les périodes qui sont approximativement équidistantes.

## Références

L'exposé de Smeyers (1984) sur les modes non radiaux est particulièrement intéressant.

Pour plus d'informations sur la nature physique des différents types de modes on pourra consulter sur les articles de Scuflaire (1974ab). Tolstoy (1963) a donné un exposé remarquable de la théorie des ondes planes dans un milieu de géométrie très simple. On retrouve dans ce contexte les mêmes types d'ondes qu'ici.

Pour une étude rigoureuse des équations d'oscillation non radiale, dans l'approximation de Cowling, avec  $\Gamma_1$  variable, on consultera l'article de Gabriel et Scuflaire (1979). On y montre l'existence des modes  $p$ ,  $g^\pm$  et  $f$ . On trouvera dans Christensen-Dalsgaard et Gough (2001) une réflexion intéressante sur la classification des modes non radiaux et une étude du mode  $f$  pour  $\ell = 1$

On trouvera une discussion détaillée de la décomposition de  $\overrightarrow{\delta r}$  en ses composantes sphéroïdales et toroïdales dans l'article d'Aizenman et Smeyers (1977).

Sur la complétude de l'ensemble des fonctions propres du problème non radial, on pourra consulter les articles de Kaniel et Kovetz (1967) et d'Eisenfeld (1969).

Le comportement asymptotique des modes non radiaux dans l'approximation de Cowling est bien analysé par Tassoul (1980). On trouvera dans cet article des références et des commentaires sur les travaux antérieurs. Des études ultérieures ont permis de s'affranchir de l'approximation de Cowling : Tassoul (1990) et Smeyers et al. (1996) pour les modes  $p$ ; Smeyers et al. (1995) et Willems et al. (1997) pour les modes  $g$ .

Aizenman M.L., Smeyers P., 1977. An analysis of the linear adiabatic oscillations of a star in terms of potential fields. *Astrophys Space Sci*, 48, 123–136.

Christensen-Dalsgaard J., Gough D.O., 2001. On the dipolar  $f$  mode of stellar oscillation. *MNRAS*, 326, 1115–1121.

Eisenfeld J., 1969. A completeness theorem for an integro-differential operator. *J Math Anal Appl*, 26, 357–375.

Gabriel M., Scuflaire R., 1979. Properties of non-radial stellar oscillations. *Acta Astron*, 29, 135–149.

Kaniel S., Kovetz A., 1967. Schwarzschild's criterion for instability. *Phys Fluids*, 10, 1186–1193.

Scuflaire R., 1974a. Space oscillations of stellar non radial eigen-functions. *Astron Astrophys*, 34, 449–451.

Scuflaire R., 1974b. The non radial oscillations of condensed polytropes. *Astron Astrophys*, 36, 107–111.

Smeyers P., 1984. Non-radial oscillations. In Noels A., Gabriel M. (edit.), *Theoretical problems in stability and oscillations, Proceedings of the 25th Liège international astrophysical colloquium*, Université de Liège, Institut d'Astrophysique, 68–91.

Smeyers P., de Boeck I., van Hoolst T., Decock L., 1995. Asymptotic representation of linear, isentropic  $g$ -modes of stars. *Astron Astrophys*, 301, 105–122.

Smeyers P., Vansimpson T., de Boeck I., van Hoolst T., 1996. Asymptotic representation of high-frequency, low-degree  $p$ -modes in stars and in the Sun. *Astron Astrophys*, 307, 105–120.

Tassoul M., 1980. Asymptotic approximations for stellar nonradial pulsations. *Astrophys J Suppl*, 43, 469–490.

Tassoul M., 1990. Second order asymptotic approximation for stellar nonradial acoustic modes. *Astrophys J*, 358, 313–327.

Tolstoy I., 1963. The theory of waves in stratified fluids including the effects of gravity and rotation. *Rev Mod Phys*, 35, 207–230.

Willems B., Van Hoolst T., Smeyers P., 1997. Asymptotic representation of non radial  $g^+$ -modes in stars with a convective core. *Astron Astrophys*, 318, 99–107.

# Chapitre 15

## Influence de la rotation

Étudions l'effet d'une rotation lente de l'étoile sur ses pulsations adiabatiques non radiales. Le modèle est en rotation différentielle stationnaire autour de l'axe  $z$  à la vitesse angulaire  $\Omega(r, \theta)$  et la rotation est suffisamment lente pour qu'on puisse négliger les termes en  $\Omega^2$  (s'ils devaient être pris en considération, le modèle ne pourrait plus être considéré comme sphérique).

La différence, par rapport au modèle sans rotation, s'introduit dans le développement de l'équation de mouvement

$$\frac{d^2 \vec{\delta r}}{dt^2} = \mathcal{L} \vec{\delta r},$$

qui s'écrit maintenant

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} \right)^2 \vec{\delta r} = \mathcal{L} \vec{\delta r},$$

où  $\vec{v}$  est la vitesse de rotation dans le modèle non perturbé,

$$\vec{v} = \Omega r \sin \theta \vec{e}_\phi.$$

Recherchons une solution dépendant du temps par un facteur  $e^{-i\sigma t}$  et négligeons les termes du second ordre en  $v$  (ou en  $\Omega$ ), il vient

$$\sigma^2 \vec{\delta r} + 2\sigma \mathcal{M} \vec{\delta r} + \mathcal{L} \vec{\delta r} = 0,$$

où on a posé

$$\mathcal{M} \vec{\delta r} = i(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{\delta r}.$$

$\mathcal{M}$  est un opérateur linéaire imaginaire pur ( $\overline{\mathcal{M}} = -\mathcal{M}$ ) et on montre aisément qu'il est hermitien. En effet,

$$\begin{aligned} (\mathcal{M} \vec{\xi}, \vec{\eta}) &= \int i\rho [(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{\xi}] \cdot \vec{\eta} dV \\ &= \int i \text{div} [\rho(\vec{\xi} \cdot \vec{\eta}) \vec{v}] dV - \int i(\vec{\xi} \cdot \vec{\eta}) \text{div}(\rho \vec{v}) dV - \int i\rho [(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{\eta}] \cdot \vec{\xi} dV. \end{aligned}$$

Le premier terme peut être transformé en intégrale de surface qui s'avère être nulle et le second contient le facteur nul  $\text{div}(\rho \vec{v})$ . Il reste donc  $(\vec{\xi}, \mathcal{M} \vec{\eta})$ .

Pour toute fonction  $\vec{\xi}$ , on peut former les expressions

$$J = (\xi, \xi), \quad M = (\xi, \mathcal{M}\xi) \quad \text{et} \quad L = (\xi, \mathcal{L}\xi)$$

et résoudre l'équation

$$J\Sigma^2 + 2M\Sigma + L = 0$$

par rapport à  $\Sigma$ . On définit ainsi une fonctionnelle  $\Sigma(\xi)$  qui jouit d'une propriété variationnelle intéressante. Si  $\xi$  est une solution de l'équation de mouvement pour une valeur de  $\sigma$  réelle, alors  $\xi$  rend la fonctionnelle  $\Sigma$  stationnaire et  $\sigma = \Sigma(\xi)$ .

Fixons notre attention sur un mode d'oscillation. En l'absence de rotation, il est décrit par une fonction propre  $\xi_0$  et sa fréquence  $\sigma_0$  satisfait à l'équation

$$J_0\sigma_0^2 + L_0 = 0 \quad \text{avec} \quad J_0 = (\xi_0, \xi_0) \quad \text{et} \quad L_0 = (\xi_0, \mathcal{L}\xi_0).$$

En présence d'une rotation lente, sa fonction propre et sa fréquence propre s'écriront

$$\xi = \xi_0 + \xi_1 \quad \text{et} \quad \sigma = \sigma_0 + \sigma_1,$$

où  $\xi_1$  et  $\sigma_1$  sont de petites corrections dues à la rotation. La fréquence satisfait à l'équation

$$J\sigma^2 + 2M\sigma + L = 0.$$

On développe cette équation en négligeant les termes d'ordres supérieurs au premier en les corrections en notant que  $M_0 = (\xi_0, \mathcal{M}\xi_0)$  doit aussi être considéré comme une correction, car cette expression contient la vitesse de rotation de l'étoile. Il vient

$$\sigma_1 = -M_0/J_0.$$

On montre aisément que

$$\mathcal{M}\vec{\xi} = -m\Omega\vec{\xi} + i\vec{\Omega} \wedge \vec{\xi},$$

et il vient

$$\sigma_1 = \frac{\int \rho \left[ m\Omega|\xi|^2 - i(\vec{\Omega}, \vec{\xi}, \vec{\xi}) \right] dV}{\int \rho|\xi|^2 dV}.$$

Cette expression est nulle pour un mode radial. Pour un mode non radial, on écrit  $\vec{\xi}$  sous la forme

$$\vec{\xi} = aY_{\ell m}\vec{e}_r + b \left( \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{im}{\sin \theta} Y_{\ell m} \vec{e}_\phi \right)$$

et il vient

$$i(\vec{\Omega}, \vec{\xi}, \vec{\xi}) = 2m\Omega ab|Y_{\ell m}|^2 + m\Omega b^2 \frac{\partial |Y_{\ell m}|^2}{\partial \theta} \cotg \theta.$$

Finalement, on obtient

$$\sigma_1 = \frac{m \int \rho \Omega \left\{ (a^2 - 2ab)|Y_{\ell m}|^2 + b^2 \left( \left| \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \theta} \right|^2 + \frac{m^2}{\sin^2 \theta} |Y_{\ell m}|^2 - \frac{\partial |Y_{\ell m}|^2}{\partial \theta} \cotg \theta \right) \right\} dV}{\int \rho r^2 [a^2 + \ell(\ell+1)b^2] dr}.$$



Cette expression se simplifie si on suppose que  $\Omega = \Omega(r)$ , ce qui semble être une hypothèse assez raisonnable. On obtient alors

$$\sigma_1 = \frac{m \int \rho r^2 \Omega [a^2 + \ell(\ell + 1)b^2 - 2ab - b^2] dr}{\int \rho r^2 [a^2 + \ell(\ell + 1)b^2] dr}.$$

Dans le cas particulier où la rotation est uniforme, cette expression se simplifie encore et on a

$$\sigma_1 = m\beta\Omega \quad \text{ou} \quad \sigma_{k\ell m} = \sigma_{k\ell}^0 + m\beta_{k\ell}\Omega,$$

où  $\sigma_{k\ell}^0$  est la fréquence propre en l'absence de rotation et la constante  $\beta_{k\ell}$  est calculée à partir des fonctions propres du mode  $(k, \ell)$  sans rotation,

$$\beta_{k\ell} = \frac{\int \rho r^2 [a^2 + \ell(\ell + 1)b^2 - 2ab - b^2] dr}{\int \rho r^2 [a^2 + \ell(\ell + 1)b^2] dr}.$$

On notera que la rotation lève complètement la dégénérescence.

La rotation de l'étoile affecte également les modes toroïdaux. En présence de rotation, ces modes acquièrent des fréquences non nulles et le déplacement cesse d'être entièrement horizontal et toroïdal. Ce sont des modes de basse fréquence, de même nature que les ondes de Rossby ou ondes planétaires. Leur dynamique est dominée par la force de Coriolis. Nous ne les étudierons pas ici. Signalons que dans le cas de la rotation uniforme, leurs fréquences sont données, en première approximation, par la relation

$$\sigma = m\Omega - \frac{2m\Omega}{\ell(\ell + 1)}.$$

## 15.1 Oscillations non radiales dans les étoiles variables

La mise en évidence de modes non radiaux dans les étoiles variables repose sur l'observation d'indices divers : déformation caractéristique du profil des raies spectrales, fréquence de pulsation inférieure à celle du mode fondamental radial, rapport de fréquences incompatible avec des pulsations radiales, multiplet de fréquences provenant de la levée de la dégénérescence par la rotation.

Certaines variables du type  $\beta$  Cep ainsi qu'un certain nombre de variables  $\delta$  Sct présentent des pulsations non radiales en plus de leurs modes radiaux.

La variabilité des profils de raies dans certaines étoiles B variables (SPB ou *slowly pulsating B stars*) résulte de l'existence de modes non radiaux en présence de rotation.

Les naines blanches variables sont en général multipériodiques et présentent des périodes de quelques centaines à quelques milliers de secondes. Les modes observés sont des modes  $g$  de degré  $\ell$  peu élevé. On observe parfois le *splitting* des fréquences dû à la rotation.

La variabilité des étoiles Ap est due à la non uniformité de leur surface et à leur rotation. Chez certaines de ces étoiles, à ces variations, se superposent des variations de lumière de

faible amplitude et de périodes comprises entre 4 et 15 minutes. L'analyse fait apparaître des fréquences régulièrement espacées, illustrant le *splitting* rotationnel.

Le cas le mieux étudié est celui de l'oscillation solaire à 5 minutes. Elle se compose de milliers de modes de toutes les valeurs du degré  $\ell$  des fonctions sphériques comprises entre 0 et 3000, de fréquences voisines de 3 mHz. Pour les valeurs peu élevées de  $\ell$ , il s'agit de modes  $p$  d'ordre compris entre 10 et 30. Pour une valeur de  $\ell$  donnée, l'espacement des fréquences  $\Delta\nu = \Delta\sigma/2\pi$  de deux modes consécutifs est voisin de 136  $\mu\text{Hz}$ . L'erreur relative sur les fréquences est inférieure à  $10^{-4}$  pour la plupart des modes et de l'ordre de  $10^{-5}$  pour certains d'entre eux, de sorte que les structures fines dues à la rotation peuvent être mises en évidence (l'écartement des fréquences d'un multiplet est de l'ordre de 0,4  $\mu\text{Hz}$ ).

## Note

La décomposition des fréquences des modes non radiaux par la rotation est désignée en anglais par l'expression *rotational splitting*. L'usage du terme *splitting* dans ce contexte est fréquent en français.

## Références

L'expression des fréquences en présence de rotation a été obtenue par Ledoux (1949 et 1951) et Cowling et Newing (1949) dans le cas d'une rotation uniforme. Pour les étoiles en rotation différentielle, la théorie repose sur les travaux de Lynden-Bell et Ostriker (1967), Aizenman et Cox (1975), Hansen, Cox et Van Horn (1977) et Gough (1981).

On trouvera une description des modes toroïdaux dans l'article d'Aizenman et Smeyers (1977). Pour l'influence de la rotation sur ceux-ci, on pourra consulter les articles Pappaloizou et Pringle (1978), de Saio (1982) et de Lee et Saio (1986).

Aizenman M.L., Cox J.P., 1975. Vibrational stability of differentially rotating stars. *Ap J*, 202, 137–147.

Aizenman M.L., Smeyers P., 1977. An analysis of the linear adiabatic oscillations of a star in terms of potential fields. *Astrophys Space Sci*, 48, 123–136.

Cowling T.G., Newing R.A., 1949. The oscillations of a rotating star. *Ap J*, 109, 149–158.

Gough D.O., 1981. A new measure of the solar rotation. *MNRAS*, 196, 731–745.

Hansen C.J., Cox J.P., Van Horn H.M., 1977. The effects of differential rotation on the splitting of nonradial modes of stellar oscillation. *Ap J*, 217, 151–159.

Ledoux P., 1949. Contributions à l'étude de la structure interne des étoiles et leur stabilité. *Mém Soc Roy Sci Liège*, 4e sér, 9.

Ledoux P., 1951. The nonradial oscillations of gaseous stars and the problem of Beta Canis Majoris. *Ap J*, 114, 373–384.

Lee U., Saio H., 1986. Overstable convective modes in uniformly rotating massive main-sequence stars. *MNRAS*, 221, 365–376.

- Lynden-Bell D., Ostriker J.P., 1967. On the stability of differentially rotating bodies. MNRAS, 136, 293–310.
- Papaloizou J., Pringle J.E., 1978. Non-radial oscillations of rotating stars and their relevance to the short-period oscillations of cataclysmic variables. MNRAS, 182, 423–442.
- Saio H., 1982. R-mode oscillations in uniformly rotating stars. Ap J, 256, 717–735.



## Chapitre 16

# Sismologie solaire et stellaire

L'objectif principal de la sismologie solaire (héliosismologie) ou stellaire (astérosismologie) est d'inférer la structure du Soleil ou des étoiles à partir des propriétés observées des oscillations solaires ou stellaires. Ce problème est souvent appelé problème inverse. Les données d'observation sont de loin plus abondantes dans le cas du Soleil que dans le cas des étoiles. Nous parlerons donc surtout d'héliosismologie.

La méthode d'inversion la plus simple consiste à disposer d'une famille de modèles dépendant de quelques paramètres et d'ajuster leurs valeurs, par la méthode des moindres carrés par exemple, de façon à reproduire au mieux les fréquences observées. On peut ainsi ajuster l'abondance de l'hélium et le paramètre de longueur de mélange dans la zone convective. Cette façon d'utiliser les données ne nécessite pas l'usage d'une technique de calcul spécialisée mais elle n'extrait pas le maximum d'information des données héliosismiques disponibles.

Une autre méthode fait usage des expressions asymptotiques des fréquences d'oscillation. Ces expressions ont l'avantage de mettre en évidence les facteurs importants déterminant les fréquences, mais on peut s'interroger sur la validité de leur emploi pour des modes d'ordre pas très élevé.

Nous décrirons ci-dessous quelques aspects des méthodes d'inversion numériques. La première étape est toujours la résolution du problème direct, qui consiste à calculer les fréquences d'oscillation d'un modèle solaire de référence. Comme on l'a vu, cela nécessite la résolution d'un système d'équations différentielles aux valeurs propres et aux conditions limites dont les coefficients dépendent du modèle d'équilibre. Dans une seconde étape, des fréquences observées, on infère des corrections aux valeurs de ces coefficients pour le Soleil réel. On ne peut évidemment pas espérer que l'héliosismologie fournisse un modèle solaire de manière univoque. D'une part il y a certainement des propriétés du Soleil qui ne peuvent pas être déduites de la mesure des fréquences d'oscillation, d'autre part les données sont en nombre fini et entachées d'erreurs.

## 16.1 Détermination de $\Omega(r)$

Les données de *splitting* rotationnel fournissent des indications sur la vitesse angulaire de rotation  $\Omega$  à l'intérieur du Soleil. Pour simplifier, nous supposons qu'elle dépend uniquement de  $r$ .

$$\sigma_{k\ell m} - \sigma_{k\ell 0} = m \int K_{k\ell}(r)\Omega(r) dr,$$

où le noyau  $K_{k\ell}(r)$  est construit à partir des fonctions propres du mode  $(k, \ell)$  en l'absence de rotation.

En utilisant un indice unique  $i$  au lieu du couple  $(k, \ell)$ , les données sismiques imposent sur  $\Omega$  les conditions linéaires

$$\int K_i(r)\Omega(r) dr = w_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Il est clair que ces équations, en nombre fini, ne permettent pas de déterminer univoquement  $\Omega(r)$ . A toute solution de ces équations, on peut en effet ajouter une fonction  $\Omega_{\perp}(r)$  orthogonale à tous les noyaux  $K_i(r)$  et obtenir une nouvelle solution.

$$\int K_i(r)\Omega_{\perp}(r) dr = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Il faut ajouter que les données  $w_i$  sont entachées d'erreurs, ce qui renforce l'indétermination de  $\Omega(r)$ . Le problème n'est donc pas seulement de trouver une solution approchée des équations ci-dessus, mais de sélectionner, parmi une infinité de solutions, celle qui décrirait le mieux la distribution réelle de vitesse angulaire à l'intérieur du Soleil. Il faudrait pour cela disposer d'informations supplémentaires sur  $\Omega(r)$ , provenant d'une autre source que les données sismiques. À défaut de disposer de telles informations, on impose à  $\Omega(r)$  des conditions dont le caractère arbitraire est inévitable. Nous nous bornerons à l'esquisse de deux méthodes d'inversion.

### Développement spectral

Puisque la composante de  $\Omega(r)$  orthogonale aux  $K_i(r)$  est inaccessible aux observations, il paraît assez naturel de vouloir seulement déterminer la partie de  $\Omega(r)$  qui peut s'exprimer comme combinaison linéaire des  $K_i(r)$  :

$$\tilde{\Omega}(r) = \sum_{j=1}^N \Omega_j K_j(r).$$

Les coefficients  $\Omega_j$  doivent satisfaire aux équations

$$\sum_{j=1}^N A_{ij}\Omega_j = w_i, \quad i = 1, \dots, N \quad \text{avec} \quad A_{ij} = A_{ji} = \int K_i(r)K_j(r) dr.$$

On se heurte toutefois au problème que la matrice  $A$  est presque singulière. De petites erreurs sur les  $w_i$  impliquent alors des erreurs importantes sur les  $\Omega_j$ . La solution qu'on

obtiendrait par la résolution directe du système d'équations ci-dessus serait dominée par les erreurs affectant les données et serait complètement illusoire. On dit d'un tel problème qu'il est mal posé.

Pour mieux mettre en évidence l'origine du problème, écrivons la matrice  $A$  (symétrique, définie positive) sous la forme

$$A = U \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \tilde{U},$$

où  $U$  est orthogonale et où les valeurs propres sont ordonnées par valeurs décroissantes,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$ . Il vient,  $\Omega$  désignant le vecteur de composantes  $\Omega_j$ ,

$$\Omega = U \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_N}\right) \tilde{U} w.$$

On voit que l'amplification des erreurs affectant les données provient des petites valeurs propres de la matrice  $A$ . La cause de cette situation doit être recherchée dans le fait que le nombre d'informations pratiquement indépendantes présentes dans les données héliosismiques est beaucoup plus petit que le nombre de fréquences mesurées. Le remède consiste à n'utiliser que les données ou combinaisons linéaires de données correspondant à des informations indépendantes. Cela peut se faire simplement en remplaçant, dans la matrice diagonale, les  $1/\lambda_i$  par 0, à partir d'un certain rang, lorsque les  $\lambda_i$  sont jugés trop petits. Plus astucieusement, les données redondantes peuvent être éliminées, lors d'un traitement préalable, avant de commencer le processus d'inversion proprement dit.

### Méthode des moindres carrés

On choisit une base de fonctions  $\phi_j(r)$  ( $j = 1, \dots, M$ ) pour exprimer une approximation  $\tilde{\Omega}(r)$  de  $\Omega$  :

$$\tilde{\Omega} = \sum_{j=1}^M \Omega_j \phi_j(r).$$

Étant donné la redondance des données par rapport aux informations qu'elles contiennent, on choisira  $M < N$  et on déterminera les  $\Omega_j$  par la méthode des moindres carrés. On impose généralement des conditions supplémentaires sur  $\tilde{\Omega}(r)$ , par exemple de ne pas varier trop rapidement. On sera ainsi amené à minimiser, par exemple, une expression du type

$$S = \sum_{i=1}^N \left[ w_i - \int K_i(r) \tilde{\Omega}(r) dr \right]^2 + \mu \int \left( \frac{d^2 \tilde{\Omega}}{dr^2} \right)^2 dr,$$

où  $\mu$  est un paramètre positif arbitrairement choisi. Le dernier terme a pour effet d'adoucir les variations de  $\tilde{\Omega}(r)$ , mais d'autres expressions ont été utilisées.

On détermine alors les  $\Omega_j$  qui rendent minimale la valeur de  $S$  en résolvant les équations linéaires

$$\frac{\partial S}{\partial \Omega_j} = 0, \quad j = 1, \dots, M.$$

## Les résultats obtenus

On connaît depuis longtemps la rotation superficielle du Soleil et on sait que les régions équatoriales tournent plus rapidement que les régions polaires. Toutefois, on ne parvient pas à obtenir un accord meilleur que 2% entre les différentes observations. L'héliosismologie a permis de mesurer la vitesse angulaire de rotation en fonction de la profondeur et de la latitude avec une précision de quelques pourcents dans la zone convective et la partie supérieure du noyau radiatif (jusque  $0,4 R_{\odot}$ ). Dans la zone convective, la rotation serait fort semblable à ce qu'elle est en surface, plus rapide à l'équateur que dans les régions polaires. Sous la zone convective, la rotation deviendrait uniforme (à la manière d'un solide) à une vitesse angulaire intermédiaire entre la valeur équatoriale et la valeur polaire. Notre connaissance de la rotation au-dessous de  $0,4 R_{\odot}$  est assez pauvre, à cause de l'imprécision des données de *splitting* pour les modes de  $\ell$  faibles. Il semblerait toutefois que les couches les plus internes tourneraient plus rapidement.

## 16.2 Détermination de la structure solaire

Les fréquences des pulsations adiabatiques sont déterminées par la distribution de masse et de  $\Gamma_1$  dans le modèle, c'est-à-dire par les fonctions  $\rho(r)$  et  $\Gamma_1(r)$ . Il est aisé de voir que les autres coefficients intervenant dans les équations de pulsation peuvent être déduits de ces deux fonctions. Au lieu de  $\rho(r)$  et  $\Gamma_1(r)$ , on peut choisir deux autres fonctions indépendantes, par exemple  $\rho(r)$  et  $c(r)$  (vitesse du son). L'expression asymptotique des modes  $p$  montre clairement le rôle essentiel joué par la vitesse du son dans la détermination des fréquences de ces modes. Dans ce qui suit, nous montrons comment les données sismiques permettent d'obtenir des informations sur la vitesse du son. Le procédé peut être généralisé pour obtenir simultanément des informations sur  $c(r)$  et  $\rho(r)$ .

Les fréquences de pulsation dépendent de  $c(r)$  d'une façon compliquée, certainement pas linéaire. Les procédés développés pour déterminer  $\Omega(r)$  ne pourront s'appliquer qu'après avoir linéarisé le problème au voisinage d'un modèle de référence. Explicitons la façon dont la fréquence d'un mode donné (nous omettrons les indices  $k, l$  pour simplifier l'écriture) est modifiée à la suite d'une petite modification  $\delta c(r)$  de la vitesse du son. On calculera  $\delta\sigma$  en omettant les termes d'ordre supérieur au premier en  $\delta c(r)$ . De l'équation

$$\sigma^2 \xi = -\mathcal{L}\xi,$$

on déduit aisément

$$\frac{\delta\sigma}{\sigma} = -\frac{(\xi, \delta\mathcal{L}\xi)}{2\sigma^2(\xi, \xi)},$$

où  $\delta\mathcal{L}$  désigne la correction linéaire en  $\delta c(r)$  apportée à l'opérateur  $\mathcal{L}$ . On établit aisément

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{\xi} &= \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r^2 a(r)] - \frac{\ell(\ell+1)}{r} b(r) \right\} Y_{\ell m}(\theta, \phi), \\ (\xi, \delta\mathcal{L}\xi) &= -2 \int \rho c^2 \left| \operatorname{div} \vec{\xi} \right|^2 \frac{\delta c}{c} dV \\ &= -2 \int \rho c^2 \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 a) - \ell(\ell+1)b \right\}^2 \frac{\delta c}{c} dr, \end{aligned}$$



$$(\xi, \xi) = \int \rho r^2 [a^2 + \ell(\ell + 1)b^2] dr.$$

Il vient donc

$$\frac{\delta\sigma}{\sigma} = \int K(r) \frac{\delta c}{c} dr,$$

avec

$$K(r) = \frac{\rho c^2 \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 a) - \ell(\ell + 1)b \right\}^2}{\sigma^2 \int \rho r^2 [a^2 + \ell(\ell + 1)b^2] dr}.$$

Finalement, on devra résoudre le système

$$\int K_i(r) \frac{\delta c}{c} dr = \frac{\sigma_{i\text{ obs}} - \sigma_{i\text{ calc}}}{\sigma_{i\text{ calc}}} \equiv w_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

On pourra appliquer les techniques d'inversion linéaire évoquées plus haut. Si c'est nécessaire, on procèdera à plusieurs cycles de correction.

Les données héliosismiques ont permis de préciser l'épaisseur de la zone convective et la vitesse du son à l'intérieur du Soleil.

En ce qui concerne les étoiles autres que le Soleil, des données sismiques ont pu être exploitées pour les étoiles Ap à oscillations rapides, les variables  $\delta$  Sct et les naines blanches variables.

### 16.3 Astérosismologie non adiabatique

Les techniques décrites ci-dessus reposent sur une comparaison entre les fréquences observées et les fréquences théoriques et celles-ci sont presque indépendantes des effets non adiabatiques. Mais la photométrie en plusieurs couleurs est capable de mettre en évidence le comportement fortement non adiabatique des fonctions propres de la pulsation dans l'atmosphère de l'étoile. L'ajustement des prédictions théoriques aux couleurs observées (rapports d'amplitudes, différences de phases) produit des contraintes sur la structure des couches extérieures de l'étoile (épaisseur de la zone convective, métallicité). L'expression *astérosismologie non adiabatique* a été forgée pour désigner ce type d'investigation.

## Références

Nous avons décomposé une matrice symétrique  $A$  en un produit de la forme

$$A = U \Delta \tilde{U},$$

où  $\Delta$  est diagonale et  $U$  unitaire. Dans certaines techniques d'inversion, il est utile de disposer d'une factorisation analogue pour une matrice quelconque  $A$ , non nécessairement carrée. On trouvera des usages de cette décomposition dans les articles de Korzennik et

Ulrich (1989), Christensen-Dalsgaard et al. (1990), Gough et Thompson (1991), Gu (1993) et Christensen-Dalsgaard et Thompson (1993).

Pour plus d'information sur les méthodes d'inversion, on consultera Gough (1985), Christensen-Dalsgaard et al. (1990), Gough et Thompson (1991), Christensen-Dalsgaard et Thompson (1993), Antia et Basu (1994). Les inversions effectuées par Sekii (1991) déterminaient  $\Omega$  en fonction de  $r$  et  $\theta$ .

La revue de Christensen-Dalsgaard (2002) est fort instructive et on y trouve une abondance de références aux travaux effectués en héliosismologie. Pour des informations sur la rotation solaire on consultera Libbrecht et Morrow (1991) et Thompson et al. (2003). On trouvera des informations sur l'application de l'astérosismologie à d'autres étoiles que le soleil dans l'article de Brown et Gilliland (1994).

Dupret et al. (2002) ont utilisé les méthodes de l'astérosismologie non adiabatique pour obtenir des informations sur la métallicité de variables du type de  $\beta$  Cep.

Antia H.M., Basu S., 1994. Nonasymptotic helioseismic inversion for solar structure. *Astron Astrophys Suppl Ser*, 107, 421–444.

Brown T.M., Gilliland R.L., 1994. Asteroseismology. *Ann Rev Astron Astrophys*, 32, 37–82.

Christensen-Dalsgaard J., 2002. Helioseismology. *Rev Mod Phys*, 74, 1073–1129.

Christensen-Dalsgaard J., Schou J., Thompson M.J., 1990. A comparison of methods for inverting helioseismic data. *MNRAS*, 242, 353–369.

Christensen-Dalsgaard J., Thompson M.J., 1993. A preprocessing strategy for helioseismic inversions. *Astron Astrophys*, 272, L1–L4.

Dupret M.-A., De Ridder J., De Cat P., Aerts C., Scuflaire R., Noels A., Thoul A., 2002. A photometric mode identification method, including an improved non-adiabatic treatment of the atmosphere. *Astron Astrophys*, à paraître.

Gough D., 1985. Inverting helioseismic data. *Solar Phys*, 100, 65–99.

Gough D.O., Thompson M.J., 1991. The inversion problem. In Cox A.N., Livingston W.C., Matthews M.S. (edit.), *Solar interior and atmosphere*, the University of Arizona Press, Tucson, 519–561.

Gu Y., 1993. Nonlinear inversion for solar oscillation frequencies. *Ap J*, 413, 422–434.

Korzennik S.G., Ulrich R.K., 1989. Seismic analysis of the solar interior. I. Can opacity changes improve the theoretical frequencies. *Ap J*, 339, 1144–1155.

Libbrecht K.G., Morrow C.A., 1991, The solar rotation. In Cox A.N., Livingston W.C., Matthews M.S. (edit.), *Solar interior and atmosphere*, the University of Arizona Press, Tucson, 479–500.

Sekii T., 1991. Two-dimensional inversion for solar internal rotation. *Publ Astron Soc Japan*, 43, 381–411.

Thompson M.J., Christensen-Dalsgaard j., Miesch M.S., Toomre J., 2003. The internal rotation of the Sun. *Ann Rev Astron Astrophys*, 41, 599–643.

## Chapitre 17

# Oscillations radiales non linéaires

C'est en général dans les couches superficielles de l'étoile que  $\delta r/r$ ,  $\delta P/P$ ,  $\delta L/L$  atteignent les valeurs les plus élevées. Différentes considérations montrent que les effets non linéaires doivent parfois être pris en considération dans l'étude des oscillations stellaires. Dans les variables de type  $\delta$  Cep et RR Lyr,  $\delta r/r$  peut atteindre des valeurs de l'ordre de 5 à 10 % et la vitesse excéder la vitesse du son. Ces valeurs impliquent des valeurs plus élevées encore pour  $\delta P/P = (4 + \omega^2)\delta r/r$  ( $\omega^2$  est typiquement compris entre 5 et 15 pour le mode fondamental ou le premier harmonique). Dans les variables W Vir, des ondes de choc se propagent dans les couches externes de l'étoile. Les courbes de lumière observées s'écartent parfois considérablement de la forme sinusoïdale prédite par la théorie linéaire. Enfin, dans la théorie linéaire, les amplitudes croissent ou décroissent exponentiellement au cours du temps. L'observation d'oscillations d'amplitude finie constante montre bien que des effets non linéaires limitent la croissance des amplitudes des modes vibrationnellement instables.

Il est commode d'utiliser le formalisme lagrangien. Pour un mouvement radial et en utilisant l'indice 0 pour désigner l'état initial, l'équation de continuité s'écrit

$$\rho r^2 \frac{\partial r}{\partial r_0} = \rho_0 r_0^2.$$

Nous avons vu que l'équation de Poisson pouvait être intégrée une fois et donnait

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{Gm}{r^2}.$$

A l'aide de ces résultats, on écrit aisément l'équation de mouvement

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{Gm}{r^2} - \frac{r^2}{\rho_0 r_0^2} \frac{\partial P}{\partial r_0},$$

l'équation de conservation de l'énergie

$$T \frac{dS}{dt} = \epsilon - \frac{1}{4\pi \rho_0 r_0^2} \frac{\partial L}{\partial r_0},$$

et l'équation de transfert dans une zone radiative

$$L = -\frac{16\pi r^4 a c T^3}{3\kappa \rho_0 r_0^2} \frac{\partial T}{\partial r_0}.$$

Dans l'approximation adiabatique, les deux dernières équations sont remplacées par

$$\frac{dP}{dt} = c^2 \frac{d\rho}{dt}.$$

Cette équation s'intègre immédiatement quand  $\Gamma_1$  est constant,

$$\frac{P}{P_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\Gamma_1} = \left( \frac{r_0^2}{r^2 \partial r / \partial r_0} \right)^{\Gamma_1}.$$

Le mouvement obéit alors à l'équation

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{Gm}{r^2} - \frac{r^2}{\rho_0 r_0^2} \frac{\partial}{\partial r_0} \left[ P_0 \left( \frac{r_0^2}{r^2 \partial r / \partial r_0} \right)^{\Gamma_1} \right].$$

Cette équation aux dérivées partielles peut être résolue par séparation des variables dans deux cas non réalistes

1° ) pour un modèle quelconque si  $\Gamma_1 = 4/3$ ,

2° ) pour le modèle homogène ( $\rho_0$  indépendant de  $r_0$ ).

### Exercice

Résoudre le problème dans ces deux cas.

## 17.1 Développement en série

Une des premières méthodes utilisées pour approcher les solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires d'oscillation adiabatique consiste à exprimer la solution sous forme de série, dont on ne gardera que les termes les plus significatifs. On pose

$$r = r_0(1 + \xi) \quad \text{et} \quad \xi = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(r_0) q_i(t),$$

où on aura choisi soit les  $f_i(r_0)$  soit les  $q_i(t)$  constituant une base orthogonale. Eddington développait  $\xi$  en série de Fourier du temps (choix des  $q_i(t)$ ). De cette façon on obtient une suite d'équations différentielles où les  $f_i(r_0)$  sont les fonctions inconnues. Dans les travaux plus récents, on a généralement adopté les fonctions propres du problème linéaire comme  $f_i(r_0)$  et on obtient une suite d'équations différentielles pour les  $q_i(t)$ . Cette approche est plus générale que la précédente car elle ne suppose pas a priori une solution périodique. On obtient de cette façon un problème hamiltonien.

## 17.2 Intégration numérique avec conditions initiales

Vers le milieu des années 60, des programmes de calcul non linéaire ont été développés pour résoudre les équations de l'hydrodynamique sous leur forme lagrangienne (variables indépendantes  $m$  et  $t$ ) et l'équation de transfert dans le cas d'une pulsation radiale. Le

modèle stellaire est divisé en un certain nombre de couches et un pas temporel est choisi. Les équations aux dérivées partielles sont ainsi remplacées par un système d'équations aux différences. L'expérience a montré que des résultats pouvaient être obtenus pour des modèles possédant une cinquantaine de couches et en effectuant de l'ordre de 200 pas d'intégration par période. Une configuration initiale est choisie, par exemple la configuration statique à laquelle on superpose un champ de vitesse. On suit alors numériquement l'évolution temporelle du système. Le champ de vitesse initial peut être décrit comme une superposition des différents modes linéaires de pulsation de l'étoile. Les modes stables sont progressivement amortis et après un certain temps, seuls les modes vibrationnellement instables subsistent et finissent par atteindre leur amplitude limite. Cette méthode a ses écueils et ses limites. La discrétisation des équations aux dérivées partielles doit respecter des conditions de stabilité numérique. Pour assurer la stabilité du calcul, on est obligé d'introduire un certain nombre de contrôles limitant les changements des variables physiques. On doit introduire une viscosité artificielle (pseudo-viscosité) pour pouvoir suivre le développement des ondes de choc. L'amortissement des modes transitoires et la stabilisation de l'amplitude de l'oscillation demande parfois des temps de calcul énormes. Lorsque le temps d'amplification donné par la théorie linéaire atteint des valeurs de l'ordre de  $10^6$  périodes, l'usage de la méthode décrite est exclu.

Les résultats obtenus par ces techniques non linéaires ont confirmé et étendu les résultats de la théorie linéaire. En particulier, la période est peu modifiée par les termes non linéaires. La méthode a été utilisée avec succès dans le cas des céphéides et des RR Lyr. Elle a mis en évidence l'existence d'un cycle limite et reproduit grossièrement les courbes de lumière de ces variables.

Dans une variante de la méthode précédente, plutôt que d'imposer des conditions initiales, on recherche directement le cycle limite en imposant des conditions de périodicité. Le gain de temps de calcul est appréciable mais la méthode est délicate à mettre en oeuvre.

### 17.3 Pulsations régulières et chaotiques

Les variables des types W Vir, RV Tau et les semi-régulières occupent des régions contiguës du diagramme HR. Les courbes de lumière des W Vir sont périodiques (la figure 17.1 représente un cycle de W Vir). Celles des RV Tau présentent assez régulièrement une alternance de minimums peu profonds et de minimums profonds (figure 17.2). Enfin les courbes de lumières des variables semi-régulières sont assez irrégulières bien qu'on ait l'impression de discerner une période (figure 17.3). Ces variables obéissent à une même relation période-luminosité, à condition de prendre pour période le temps séparant deux minimums successifs, bien que l'usage veuille qu'on définisse la période d'une RV Tau comme le temps séparant deux minimums profonds (figure 17.4).

Bien que leurs comportements soient qualitativement différents, ceci amène à rechercher un cadre commun pour la description de ces variables. Buchler et Kovacs (1987) ont étudié les pulsations non linéaires d'une série de modèles d'enveloppe de type W Vir de températures effectives décroissantes. L'analyse linéaire de stabilité montre que les modèles de température effective élevée sont vibrationnellement stables. Ils deviennent instables lorsque la température effective est abaissée sous 6500 K. Le modèle oscille

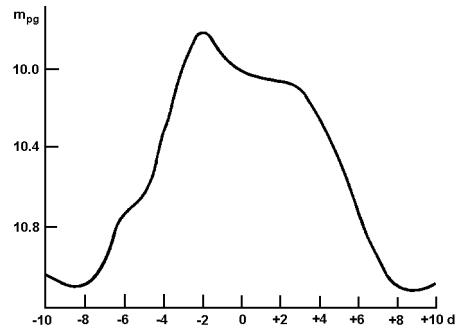


FIG. 17.1 – Courbe de lumière de W Vir. Hoffmeister, Richter, Wenzel, 1985.

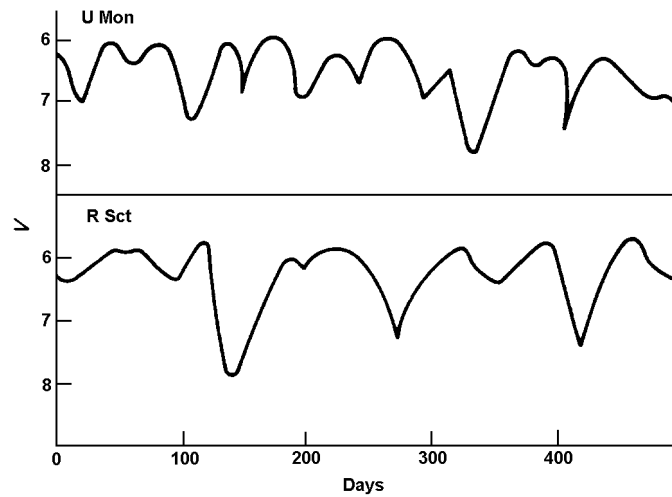


FIG. 17.2 – Courbes de lumière de deux variables RV Tauri : U Mon ( $P=92,3$  jours) et R Sct ( $P=140,2$  jours). Petit, 1987.

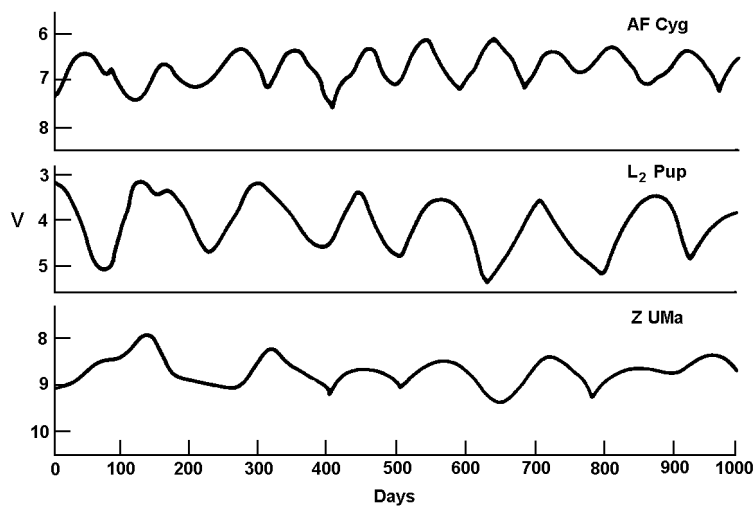


FIG. 17.3 – Courbes de lumière de trois variables SRb : AF Cyg ( $P=94,1$  jours), L<sub>2</sub> Pup ( $P=140,8$  jours) et Z UMa ( $P=196$  jours). Petit, 1987.

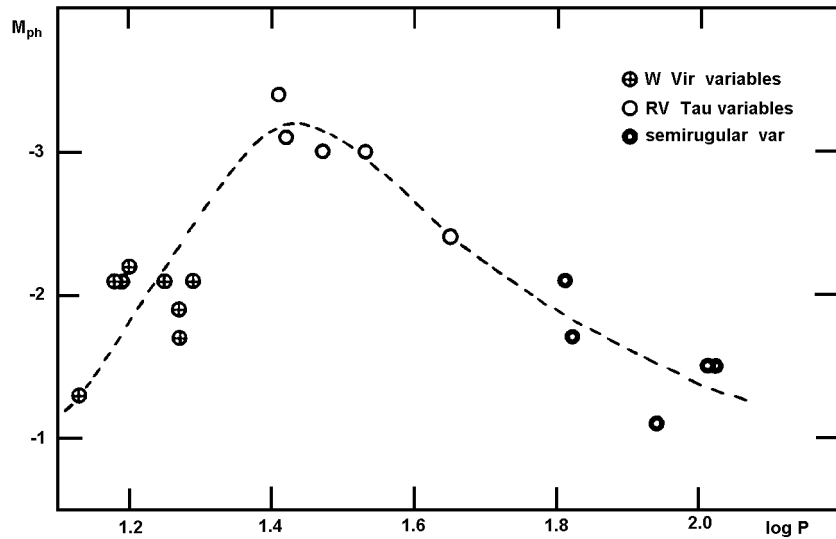


FIG. 17.4 – La relation période-luminosité de variables des types W Vir, RV Tau et de variables semi-régulières d'amas globulaires. Les périodes sont exprimées en jours et pour les variables RV Tau, on a utilisé la demi-période. Rosino, 1951.

d'abord avec une période proche de celle du mode fondamental. Lorsqu'on continue à abaisser la température effective, l'amplitude de la pulsation croît et la période diffère de plus en plus de la période linéaire. Lorsqu'on abaisse encore la température, on observe d'abord une pulsation de complexité croissante avec doublements de période successifs. Finalement le comportement devient chaotique. Il semble que l'attracteur chaotique soit de dimension assez faible (inférieure ou égale à 3). Cette séquence est illustrée par la figure 17.5.

Il est clair que ce comportement reproduit qualitativement celui qu'on observe dans le diagramme HR, en se déplaçant vers la droite, à travers les zones occupées par les variables W Vir (cycles simples), RV Tau (doublement de période) et les variables semi-régulières et irrégulières (chaos).

## Références

Le procédé de développement en série remonte à Eddington, on trouvera des exposés de la méthode dans Rosseland (1949) et Ledoux et Walraven (1958). On trouvera des informations sur les conditions de stabilité des méthodes d'intégration des équations de l'hydrodynamique et sur l'usage de la pseudo-viscosité dans Rychtmyer (1957). Christy (1964), Cox et al. (1966) et Christy (1967) ont décrit les algorithmes utilisés pour le calcul non linéaire des pulsations stellaires. La recherche directe des cycles limites a été décrite par Stellingwerf (1974). On trouvera une variété de travaux sur les oscillations non linéaires dans Takeuti et Buchler (1993).

Buchler J.R., Kovacs G., 1987. Period doubling bifurcations and chaos in W Virginis models. *Ap J*, 320, L57–62.

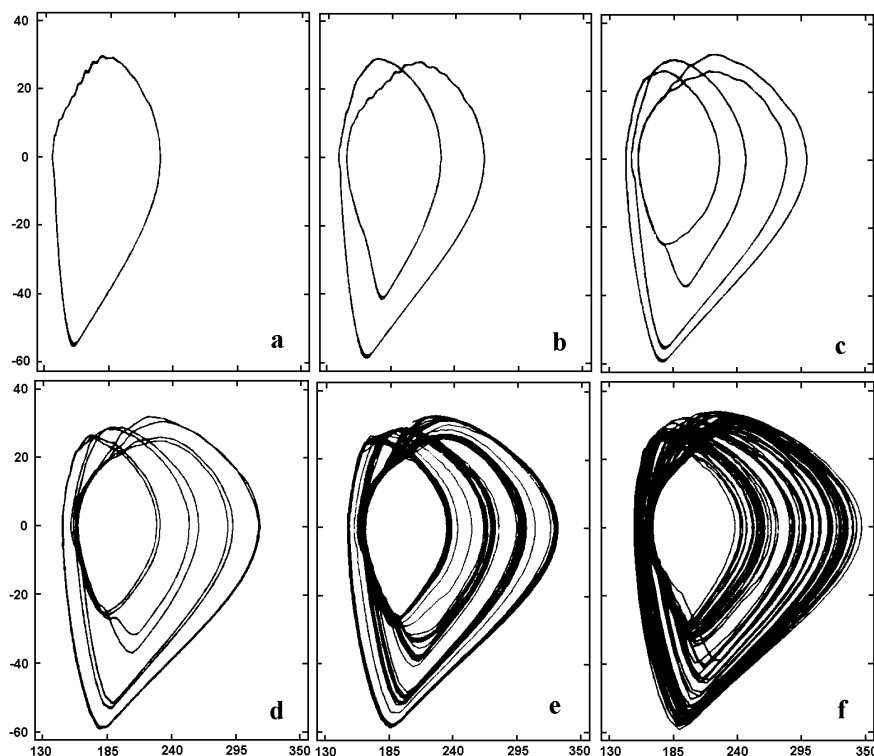


FIG. 17.5 – Graphes de  $r/10^{10}\text{cm}$  (abscisse) et  $v/\text{km s}^{-1}$  (ordonnée) pour une couche donnée de modèles de températures décroissantes de a à f. Buchler, Kovacs, 1987.

- Christy R.F., 1964. The calculation of stellar pulsation. *Rev Mod Phys*, 36, 555–571.
- Christy R.F., 1967. Computational methods in stellar pulsation. In Alder B., Fernbach S., Rotenberg M., *Methods in computational physics*, 7, Academic Press, p 191–218.
- Cox A.N., Brownlee R.R., Eilers, D.D., 1966. Time-dependent method for computation of radiation diffusion and hydrodynamics. *Ap J*, 144, 1024–1037.
- Hoffmeister C., Richter G., Wenzel W., 1985. *Variable stars*. Springer.
- Ledoux P., Walraven T., 1958. Variable stars. In Flügge S. (edit), *Handbuch der Phys*, 51, 353–600, Springer.
- Petit M., 1987. *Variable stars*. Wiley and Sons.
- Richtmyer R.D., 1957. *Difference methods for initial-value problems*. Interscience, New-York.
- Rosino L., 1951. The spectra of variables of the RV Tauri and yellow semiregular types. *Ap J*, 113, 60–71.
- Rosseland S., 1949. *The pulsation theory of variable stars*. Clarendon Press, Oxford.
- Stellingwerf R.F., 1974. The calculation of periodic pulsations of stellar models. *Ap J*, 192, 139–144.
- Takeuti M., Buchler J.-R. (edit.), 1993. Non linear phenomena in stellar variability. *Astrophys Space Sci*, 210, n<sup>OS</sup> 1–2.